Corrigé mines math 1 2021

M.SAADAOUI

Résultats préliminaires

1. $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$, donc $\varepsilon_n = \dfrac{n!}{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$

   On a donc $n! = \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\,(1+\varepsilon_n)$.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\lambda x + \mu - 1 < \lfloor \lambda x + \mu \rfloor \leq \lambda x + \mu$ ce qui donne que $x + \dfrac{\mu - 1}{\lambda} < \dfrac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda} \leq x + \dfrac{\mu}{\lambda}$ par passage à la limite, on a $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \dfrac{\lfloor \lambda x + \mu \rfloor}{\lambda} = x \neq 0$
   Donc $\lfloor \lambda x + \mu \rfloor \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \lambda x$. De même pour $\lceil \lambda x + \mu \rceil$.

3. Φ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{1+t^2}\right)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc Φ l'est aussi.

4. $\zeta(x) = (1+x)\left(x - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) = x + \dfrac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right)$.

Étude asymptotique d'une suite

5. $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \dfrac{\binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}}{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}} = \dfrac{(n-k)\,p}{(k+1)\,q}$, donc $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)} \leq 1$ si et seulement si $np - q \leq k$. On a $x_n = \lceil np - q \rceil$, donc pour $k \geq x_n$, la suite $(P(X=k))_{k\geq x_n}$ est décroissante et la suite $(P(X=k))_{k\leq x_n}$ est croissante. Par suite

$$\max_{0\leq k\leq n} (P(X=k)) = P(X = x_n).$$

6. On a $x_n - 1 < np - q \leq x_n$, la deuxième inégalité entraine que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   $n - x_n \geq n - np + q = (1-p)\,n + q \to +\infty$ (puisque $p < 1$).

$$\sqrt{npq}p_n = \sqrt{npq}P(X_n = x_n) = \sqrt{npq}\frac{n!}{x_n!\,(n-x_n)!}p^{x_n}q^{n-x_n}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{npq}p_n \quad &\underset{+\infty}{\sim} \quad \frac{\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\dfrac{x_n}{e}\right)^{x_n}\sqrt{2\pi x_n}\left(\dfrac{n-x_n}{e}\right)^{n-x_n}\sqrt{2\pi(n-x_n)}}p^{x_n}q^{n-x_n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \quad \frac{n^n\sqrt{2\pi n}\;p^{x_n}q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\sqrt{2\pi x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}\sqrt{2\pi(n-x_n)}}\end{aligned}$$

D'autre part $x_n \underset{+\infty}{\sim} np$ et $\dfrac{n-x_n}{n} = 1 - \dfrac{x_n}{n} \to 1 - p = q \neq 0$, donc $n - x_n \underset{+\infty}{\sim} qn$. On a alors

$$\sqrt{npq}p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{2\pi n}p^{x_n}q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\sqrt{2\pi x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}\sqrt{2\pi(n-x_n)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n\sqrt{2\pi n}p^{x_n}q^{n-x_n}}{x_n^{x_n}\sqrt{2\pi np}\,(n-x_n)^{n-x_n}\sqrt{2\pi qn}}$$

Donc

$$\sqrt{npq}p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^n p^{x_n}q^{n-x_n}}{\sqrt{2\pi}x_n^{x_n}\,(n-x_n)^{n-x_n}}$$

7. Pour $n > \max\left(\frac{p}{q}, \frac{q}{p}\right)$, on a $\frac{x_n - np}{np} > -1$ et $\frac{np - x_n}{nq} > -1$, donc $\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right)$ et $\zeta\left(\frac{np - x_n}{nq}\right)$ ont un sens.

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = -np\left(1 + \frac{x_n - np}{np}\right)\ln\left(1 + \frac{x_n - np}{np}\right) = x_n \ln\left(\frac{x_n}{np}\right) = \ln\left(\frac{x_n}{np}\right)^{x_n}$$

Donc $e^{-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right)} = \left(\frac{x_n}{np}\right)^{x_n}$.

$$\begin{aligned} -nq\zeta\left(1 + \frac{np - x_n}{nq}\right) &= -nq\left(\frac{(p+q)\,n - x_n}{nq}\right)\ln\left(\frac{(p+q)\,n - x_n}{nq}\right) \\ &= = -(n - x_n)\ln\left(\frac{n - x_n}{np}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{n - x_n}{np}\right)^{x_n - n}\right) \end{aligned}$$

Donc $e^{-nq\zeta\left(1+\frac{np - x_n}{nq}\right)} = \left(\frac{n - x_n}{np}\right)^{x_n - n}$. Il suffit de maintenant de faire le produit.

8. De la définition de la suite $(x_n)_n$ découle l'encadrement $-1 < \frac{-q}{np} \leq \frac{x_n - np}{np} < \frac{1-q}{np}$, donc $\frac{x_n - np}{np} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, ce qui donne par la question **4.** du préliminaire que :

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = -np\left[\frac{x_n - np}{np} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_n - np}{np}\right)^2 + o\left(\left(\frac{x_n - np}{np}\right)^2\right)\right]$$

La suite $(x_n - np)_n$ est bornée, donc

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) = -x_n + np + o(1)$$

De même $-nq\zeta\left(\frac{x_n - np}{nq}\right) = -x_n + np + o(1)$. Donc

$$-np\zeta\left(\frac{x_n - np}{np}\right) - -nq\zeta\left(\frac{x_n - np}{nq}\right) = o(1) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

A l'aide des questions **6. et 7.** précedentes, on a $\sqrt{npq}p_n \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Convergence en loi

- On a $X_n(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$, donc $Y_n(\Omega) = \{\tau_{n,k};\ 0 \leq k \leq n\}$, de plus $P(Y_n = \tau_{n,k}) = P(X_n = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.
- $Y_n(\Omega)$ est fini, donc Y_n admet une espérance et une variance. Par linéairité, on a $E(Y_n) = \frac{1}{\sqrt{npq}}(E(X_n) - np) = 0$ (X_n suit loi binômiale) et $\text{Var}(Y_n) = \frac{1}{npq}V(X_n) = 1$. Y_n est donc centrée et réduite.

9. On a $\tau_{n,0} = \frac{-np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}}$, $\tau_{n,n} = \frac{\sqrt{n}q}{\sqrt{pq}} = \sqrt{\frac{nq}{p}}$. Il suffit de choisir N tel que $\sqrt{N} \geq \max\left(\frac{1}{(b-a)\sqrt{pq}}, \frac{b\sqrt{p}}{\sqrt{q}}, \frac{|a|\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\right)$, un tel entier existe puisque $\sqrt{n} \to +\infty$. Pour $n \geq N$, on a $\sqrt{n} \geq \frac{1}{(b-a)\sqrt{pq}}$, donc $\frac{1}{\sqrt{npq}} \leq b-a$, donc $b \leq \sqrt{\frac{nq}{p}} = \tau_{n,n}$ et $\frac{|a|\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{n}$ donc $-\frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{n}$, ce qui donne que $-\sqrt{\frac{np}{q}} = \tau_{n,0} \leq a$.

10. $k_n(t) = k$ si et seulement si $\left\lfloor \sqrt{npq}t + np \right\rfloor = k$ ce qui est équivalent à $k \leq \sqrt{npq}t + np < k+1$ ou encore à $\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} = \tau_{n,k} \leq t < \dfrac{k+1-np}{\sqrt{npq}} = \tau_{n,k+1}$
Donc $k_n(t) = k$ pour $\tau_{n,k} \leq t < \tau_{n,k+1}$, la fonction k_n est donc en escalier.
Pour $\tau_{n,k} \leq t < \tau_{n,k+1},\ e_n(t) = \tau_{n,k}$ donc e_n est en escalier.
Soient t, t' avec $t \leq t'$, alors $k_n(t) \leq k_n(t')$ ($t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est croissante), donc $e_n(t) = \tau_{n,k_n(t)} = \dfrac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \leq \dfrac{k_n(t') - np}{\sqrt{npq}} = e_n(t')$ .D'où la croissance de e_n.
On a $k_n(t) \leq \sqrt{npq}t + np < k_n(t) + 1$ donc $e_n(t) = \dfrac{k_n(t) - np}{\sqrt{npq}} \leq t < e_n(t) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.
D'après l'inégalité précédente, $0 \leq t - e_n(t) \leq \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc la suite $(e_n)_n$ est simplement convergente vers $t \mapsto t$.

11. D'après la question précéente $\tau_{n,k_n(a)} = \dfrac{k_n(a) - np}{\sqrt{npq}} = e_n(a) \underset{n\to+\infty}{\to} a$ et $\tau_{n,k_n(b)+1} = \dfrac{k_n(b) + 1 - np}{\sqrt{npq}} = e_n(b) + \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \underset{n\to+\infty}{\to} b$ et $F : x \mapsto \int_0^x \Phi(t)\,dt$ est continue
Donc $\displaystyle\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} \Phi(t)\,dt = F\left(\tau_{n,k_n(b)+1}\right) - F\left(\tau_{n,k_n(a)}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} F(b) - F(a) = \int_a^b \Phi(t)\,dt.$
On a $\displaystyle\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_k^{k+1} f_n(t)\,dt = \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P(Y_n = e_n(t))\,dt$
Pour $\tau_{n,k} < t < \tau_{n,k+1}$, on a $e_n(t) = \tau_{n,k+1}$ donc

$$\begin{aligned}\int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P(Y_n = e_n(t))\,dt &= \int_{\tau_{n,k}}^{\tau_{n,k+1}} P(Y_n = \tau_{n,k+1})\,dt = (\tau_{n,k+1} - \tau_{n,k})\,P(Y_n = \tau_{n,k+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{npq}} P(Y_n = \tau_{n,k+1})\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt = \sqrt{npq} \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} (\tau_{n,k+1} - \tau_{n,k})\,P(Y_n = \tau_{n,k+1}) = \sum_{k=k_n(a)}^{k_n(b)} P(Y_n = \tau_{n,k+1})$$

D'où l'égalité

$$\int_{\tau_{n,\tau_n(a)}}^{\tau_{n,\tau_n(b)+1}} f_n(t)\,dt = P(e_n(a) \leq Y_n \leq e_n(b))$$

12. On a $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq} P(Y_n = e_n(\tau_{n,k})) = \sqrt{npq} P\left(Y_n = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) = \sqrt{npq} P(X_n = k)$
Donc $f_n(\tau_{n,k}) = \sqrt{npq}\dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sqrt{npq} \dfrac{n!}{k!\,((n-k)!)} p^k q^{n-k}$. Puis par le résultat du préliminaire, on a

$$\begin{aligned}f_n(\tau_{n,k}) &= \sqrt{npq} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}\,(1+\varepsilon_n)}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2k\pi}\,(1+\varepsilon_k) \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \sqrt{2(n-k)\pi}\,(1+\varepsilon_{n-k})} p^k q^{n-k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{pqn^2}{k(n-k)}} \frac{p^k q^{n-k}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^{n-k}} \frac{1+\varepsilon_n}{(1+\varepsilon_k)(1+\varepsilon_{n-k})}\end{aligned}$$

13. D'après le prélimaire, on a $k_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} np$, donc $k_n(t) = np + o(n)$.

On a donc $n - k_n(t) = (1-p)n + o(n) = qn + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} qn$. Ce qui donne que $\dfrac{pqn^2}{k_n(t)(n-k_n(t))} \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\dfrac{pqn^2}{pqn^2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{pqn^2}{k_n(t)(n-k_n(t))}} = 1$.

On a $k_n(t) \to +\infty$ et $n - k_n(t) \to 0$ donc $\varepsilon_{k_n(t)} \to 0$ et $\varepsilon_{n-k_n(t)} \to 0$ (comme suites extraires de (ε_n) qui tend vers 0), et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\varepsilon_n}{\left(1+\varepsilon_{k_n(t)}\right)\left(1+\varepsilon_{n-k_n(t)}\right)} = 1$.

14. Pour $k \in \{0, 1, ..., n\}$ tel que $\max\left\{\sqrt{\dfrac{q}{np}}, \sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right\} |\tau_{n,k}| < 1$, on a $-1 < \sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k} < 1$ et $-1 < \sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k}$, donc il est légitime de calculer $\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)$ et $\zeta\left(-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right)$.

Maintenant on a $-np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) = -np\left(1+\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)\ln\left(1+\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)$

$\left(1+\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) = \left(1+\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\sqrt{\dfrac{q}{np}}\right) = \left(1+\dfrac{k-np}{np}\right) = \dfrac{k}{np}$

Donc $np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) = k\ln\left(\dfrac{k}{np}\right) = \ln\left(\dfrac{k}{np}\right)^k$

De même $\left(1-\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k}\right) = \left(1-\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\right) = \left(1-\dfrac{k-np}{nq}\right) = \left(\dfrac{(p+q)n-k}{nq}\right) = \dfrac{n-k}{nq}$

Donc $-nq\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) = -nq\left(\dfrac{n-k}{nq}\right)\ln\left(\dfrac{n-k}{nq}\right) = (k-n)\ln\left(\dfrac{n-k}{nq}\right)$

Ce qui donne que $-nq\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k}\right) = \ln\left(\dfrac{n-k}{nq}\right)^{\dfrac{k-n}{nq}}$

On a donc

$$e^{-np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)-nq\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k}\right)} = \left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{nq}\right)^{\dfrac{k-n}{nq}} = \frac{p^kq^{n-k}}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^k\left(\dfrac{n-k}{k}\right)^{n-k}}.$$

15. Posons $\Delta_n(t) = \dfrac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\left(\dfrac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)}\left(\dfrac{n-k_n(t)}{k_n(t)}\right)^{n-k_n(t)}}$

On a $\Delta_n(t) = \exp\left[-np\zeta\left(\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right) - nq\zeta\left(\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right)\right]$

Je cherche à utilise de le DL de ζ, pour cela on a besoin de justifier que $\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} \to 0$ et de même $\sqrt{\dfrac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)} \to 0$. On a $k_n(t) \leq \sqrt{npq}t + np < k_n(t) + 1$ donc $\sqrt{\dfrac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} = \sqrt{\dfrac{q}{np}}\underbrace{\dfrac{k_n(t)-np}{\sqrt{npq}}}_{\text{bornée}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. De même pour la deuxième.

Maintenant à l'aide de développement limite de ζ, on a :

$$\begin{aligned} -np\zeta\left(\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)}\right) &= -np\left[\sqrt{\frac{q}{np}}\tau_{n,k_n(t)} + \frac{1}{2}\frac{q}{np}\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= -np\left[\sqrt{\frac{q}{np}}\frac{k_n(t)-np}{\sqrt{npq}} + \frac{1}{2}\frac{q}{np}\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

De même
$$\begin{aligned}-nq\zeta\left(-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}\right) &= -nq\left[-\sqrt{\frac{p}{nq}}\tau_{n,k_n(t)}+\frac{1}{2}\frac{p}{nq}\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= -nq\left[-\sqrt{\frac{p}{nq}}\frac{k_n(t)-np}{\sqrt{npq}}+\frac{1}{2}\frac{p}{nq}\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\end{aligned}$$

Donc $\ln\Delta_n(t) = -\frac{1}{2}(p+q)\left(\tau_{n,k_n(t)}\right)^2+o(1) = -\frac{1}{2}(e_n(t))^2+o(1)$

Puis à l'aide de la question **11,** on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\Delta_n(t) = -\frac{t^2}{2}$

Par suite $\dfrac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)}\left(\frac{n-k_n(t)}{k_n(t)}\right)^{n-k_n(t)}} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

16. – $f_n(t) = \sqrt{npq}P(Y_n = e_n(t)) = \sqrt{npq}P\left(Y_n = \tau_{n,k_n(t)}\right) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t))$

Donc $f_n(t) = \sqrt{npq}\dfrac{n!}{k_n(t)!\,(n-k_n(t))!}p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}$

Donc $f_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{npq}\dfrac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}}{\left(\frac{k_n(t)}{e}\right)^{k_n(t)}\sqrt{2\pi k_n(t)}\left(\frac{n-k_n(t)}{e}\right)^{n-k_n(t)}\sqrt{2\pi(n-k_n(t))}}p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}$

D'après la question **16,** on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p^{k_n(t)}q^{n-k_n(t)}}{\left(\frac{k_n(t)}{n}\right)^{k_n(t)}\left(\frac{n-k_n(t)}{n}\right)^{n-k_n(t)}} = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$

D'autre part on a $k_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} np$ et que $n-k_n(t) \underset{n\to+\infty}{\sim} qn$, donc $\dfrac{\sqrt{npq}\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2\pi k_n(t)}\sqrt{2\pi(n-k_n(t))}} \underset{n\to+\infty}{\sim}$ $\dfrac{\sqrt{npq}\sqrt{2n\pi}}{\sqrt{2\pi np}\sqrt{2\pi qn}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \Phi(t)$$

17. – On a $f_n(t)\to\Phi(t)$ pour tout $t\in[a,b]$, reste à donner une domination pour intervertir la limite et l'intégrale.
On $f_n(t) = \sqrt{npq}P(X_n = k_n(t)) \leq \sqrt{npq}p_n$ (d'après la question **5.** du préliminaire puisque $p_n = \max P(X_n = k)$. D'autre part la suite $\sqrt{npq}$ est convergente(d'après le préliminaire) et donc elle est majorée. Soit C un majorant de la suite $\left(\sqrt{npq}p_n\right)_n$
On a donc $0\leq f_n(t)\leq C$ pour tout $t\in[a,b]$ et $(f_n)_n$ converge simplement vers Φ. Donc d'après le théorème de la convergence dominée, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b\Phi(t)\,dt$$

18. – On a $P(e_n(a)\leq Y\leq e_n(b)) = \displaystyle\int_{\tau_{n,k_n(a)}}^{\tau_{n,k_n(b)+1}} f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}g_n(t)\,dt$ où $g_n(t) = f_n(t)\chi_{I_n}$ où χ_{I_n} désigne la fonction indicatrice de $I_n = \left[\tau_{n,k_n(a)},\tau_{n,k_n(b)+1}\right]$.On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_{n,k_n(a)} = \lim\limits_{n\to+\infty}e_{n(a)} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_{n,k_n(b)+1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\tau_{n,k_n(b)+1} = b$, donc $g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}g_n(t) = 0$ pour $t\notin[a,b]$ et $g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}g_n(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}f_n(t) = \Phi(t)$ pour $t\in[a,b]$.De plus $0\leq g_n(t)\leq\Phi(t)$, avec Φ intégrable sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la convergence dominée, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}P(e_n(a)\leq Y\leq e_n(b)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\,dt = \int_a^b\Phi(t)\,dt.$
– On a $e_n(a)\leq a\leq e_n(b)\leq b$, on a

$$P(a\leq Y_n\leq b) = P(e_n(a)\leq Y_n\leq e_n(b)) + P(e_n(b)\leq Y_n\leq b) - P(e_n(a)\leq Y_n\leq a)$$

On a $P\left(e_n(b) \leq Y_n \leq b\right) = P\left(e_n(b) \leq \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right)$
$= P\left(\sqrt{npq}e_n(b) + np \leq X_n \leq b\sqrt{npq} + np\right) = P\left(k_n(b) \leq X_n \leq b\sqrt{npq} + np\right)$ et comme X_n est à valeurs entières, donc

$$P\left(k_n(b) \leq X_n \leq b\sqrt{npq} + np\right) = P\left(X_n = k_n(b)\right) \leq p_n$$

Par le résultat de **8,** on a $p_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \to 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(e_n(b) \leq Y_n \leq b\right) = 0$ puis de façon analogue $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(e_n(a) \leq Y_n \leq a\right) = 0$. En passant à la limite dans l'égalité du départ, on a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(a \leq Y_n \leq b\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P\left(a \leq Y_n \leq e_n(b)\right) = \displaystyle\int_a^b \Phi(t)\,dt.$

Applications

19. D'après la question **18**, on a $P\left(a < Y_n < b\right) = P\left(a \leq Y_n \leq b\right)$
Pour tout $T > 0$, on a $P\left(-T \leq Y_n \leq T\right) = P\left(-T < Y_n < T\right) = P\left(|Y_n| < T\right) = 1 - P\left(|Y_n| \geq T\right)$
On a $E\left(Y_n\right) = 0$ et $Var\left(Y_n\right)) = 1$, donc par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$P\left(|Y_n| \geq T\right) \leq \frac{1}{T^2}$$

Ce qui donne que $P\left(-T \leq Y_n \leq T\right) \geq 1 - \dfrac{1}{T^2}$, puis on passe à la limite lorsque $n \to +\infty$, on a alors, à l'aide de la question **18,** $\displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,dt \geq 1 - \frac{1}{T^2}$.
$\displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} P\left(-T \leq Y_n \leq T\right)$ donc $\displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,dt \leq 1$.
On a donc pour tout $T > 0$, $1 - \dfrac{1}{T^2} \leq \displaystyle\int_{-T}^{T} \Phi(t)\,dt \leq 1$, on fait tendre T vers $+\infty$, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t)\,dt = 1$.

20. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(e_{n,0} \leq Y_n \leq e_n(b)\right) = P\left(-\infty \leq Y_n \leq b\right) = P\left(Y_n \leq b\right)$.
D'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(e_{n,0} \leq Y_n \leq e_n(b)\right) = \int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\,dt$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(Y_n \leq b\right) = \int_{-\infty}^{b} \Phi(t)\,dt$$

On a $P\left(Y_n \geq a\right) = 1 - P\left(Y_n \leq a\right) \to 1 - \displaystyle\int_{-\infty}^{a} \Phi(t)\,dt = \int_a^{+\infty} \Phi(t)\,dt.$

Généralisation

21. – φ' est continue ne s'annule pas, donc garde un signe constant par suite φ est strictement montone. Si $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, alors φ est bijective de $\mathbb{R}$ sur lui-même
Si $\varphi' > 0$ alors φ est strictement croissante, dans ce cas

$$P\left(\alpha \leq Z_n \leq \beta\right) = P\left(\varphi^{-1}(\alpha) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\beta)\right) \to \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} \Phi(t)\,dt$$

Puis par le théorème de changement de variable, on a

$$P\left(\alpha \leq Z_n \leq \beta\right) \to \int_\alpha^\beta \frac{\Phi\left(\varphi^{-1}(u)\right)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(u)}du = \int_\alpha^\beta \Psi(u)\,du$$

Où $\Psi(u) = \dfrac{\Phi\left(\varphi^{-1}(u)\right)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(u)}$

Si φ est décroissante, $P(\alpha \leq Z_n \leq \beta) = P\left(\varphi^{-1}(\beta) \leq Y_n \leq \varphi^{-1}(\alpha)\right) \to \int_{\varphi^{-1}(\beta)}^{\varphi^{-1}(\alpha)} \Phi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \Psi_1(u)\,du$ où les mêmes calculs sauf que $\Psi_1(u) = -\dfrac{\Phi\left(\varphi^{-1}(u)\right)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(u)}$.