Première partie : un théorème de Kronecker

1. • Soit $(a_n)_n$ une suite convergente de limite l et soit $\varepsilon > 0$.
   $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1$, $|a_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, donc
   $\forall n \geq N_1$, $|m_n - l| \leq \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}|a_k - l| + \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=N_1}^{n}|a_k - l| \leq \dfrac{K}{n+1} + \dfrac{n-N_1+1}{n+1}\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{K}{n+1} + \dfrac{\varepsilon}{2}$
   où $K = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{N_1-1}|a_k - l|$, or $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{K}{n+1} = 0$, donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2$, $\dfrac{K}{n+1} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   En conclusion $\forall n \geq max(N_1, N_2)$, $|m_n - l| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
   • Avec $a_n = (-1)^n$, on aura $m_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ et $m_{2n+1} = 0$, donc la suite $(m_n)_n$ converge vers 0, mais la suite $(a_n)_n$ diverge.

2. Supposons que $(a_n)_n$ est une suite C-convergente et soit L sa C-limite, alors si on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$, on aoura $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = S_n - S_{n-1} = (n+1)m_n - nm_{n-1}$, donc $\dfrac{a_n}{n} = (1 + \dfrac{1}{n})m_n - m_{n-1} \longrightarrow L - L = 0$.

3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^\alpha$, alors • $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}((2k)^\alpha - (2k-1)^\alpha) = S_{2n} = (-1)^\alpha + \sum_{k=1}^{n-1}((2k)^\alpha - (2k+1)^\alpha) + (2n)^\alpha \geq (2n)^\alpha$.
   • $-(2n+1)^\alpha \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-(2k-1)^\alpha - (2k)^\alpha) - ()2n+1^\alpha = S_{2n+1} = (-1)^\alpha + \sum_{k=1}^{n}((2k)\alpha^\alpha - (2k+1)^\alpha) \leq 0$.
   • En en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq n^\alpha$, et par suite $|m_n| = \dfrac{|S_n|}{n+1} \leq \dfrac{n^\alpha}{n} = \dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$, or $\alpha \in]0,1[$, donc m_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4. La série $\sum c_n z_0^n$ est C-convergente, donc d'après la question 2, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{S_n(z_0)}{n+1} = 0$, c'est à dire que la suite $(c_n z_0^n)_n$ est C-convergente, ce qui entraine d'après la question 2, que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{c_n z_0^n}{n} = 0$, donc la série $\sum \dfrac{c_n z_0^n}{n}$ qui est de même rayon de convergence R que $\sum c_n z_0^n$, est convergente, ce qui exige que $|z_0| \leq R$.

5. (a) • $R = 1$. Soit z_0 de module 1, $S_n(z_0) = \begin{cases} n+1 & si \quad z_0 = 1 \\ \dfrac{1 - z_0^{n+1}}{1 - z_0} & si \quad z_0 \neq 1 \end{cases}$
   • $\sigma_n(z_0) = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & si \quad z_0 = 1 \\ \dfrac{1}{1-z_0} - \dfrac{1 - z_0^{n+2}}{(n+1)(1-z_0)} & si \quad z_0 \neq 1 \end{cases}$, donc $F = C(0,1) - \{1\}$, et
   $\forall z_0 \in F \ \sigma(z_0) = \dfrac{1}{1 - z_0}$

   (b) • $R = 1$, et si $z_0 = \pm 1$, $S_{2n}(z_0) = \alpha\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_0^{2k} + (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n-1} z_0^{2k+1} = \begin{cases} (2\alpha+\beta)n + \alpha & si \quad z_0 = 1 \\ -\beta n + \alpha & si \quad z_0 = -1 \end{cases}$
   • $S_{2n+1}(z_0) = S_{2n}(z_0) + (\alpha+\beta)z_0^{2n+1} = \begin{cases} (2\alpha+\beta)(n+1) & si \quad z_0 = 1 \\ -\beta(n+1) & si \quad z_0 = -1 \end{cases}$
   • Donc si $z_0 = \pm 1$, $\dfrac{\sigma_n(z_0)}{n}$ ne tend pas vers 0 ($2\alpha + \beta \neq 0$ et $\beta \neq 0$), et par suite d'après la question 2, $(\sigma_n(z_0))_n$ diverge.
   • Un simple calcul aboutit à $F = C(0,1) - \{-1, 1\}$ et $\forall z_0 \in F, \sigma(z_0) = \dfrac{\alpha + (\alpha+\beta)z_0}{1 - z_0^2}$.

   (c) $R = 1$.
   • -si $e^{i\lambda} = 1$, alors $S_n(1) = (1+\alpha)(n+1)$
   -si $e^{i\lambda} \neq 1$, $S_n(1) = n + 1 + \dfrac{1 - e^{i(n+1)\lambda}}{1 - e^{i\lambda}}$ et $S_n(e^{-i\lambda}) = \dfrac{1 - e^{-(n+1)\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} + \alpha(n+1)$, donc si $z_0 \in \{1, e^{-i\lambda}\}$,

$\dfrac{S_n(z_0)}{n}$ ne tend pas vers 0, ce qui entraine que $(\sigma_n)_n$ diverge.

• Un calcul montre que $F = C(0,1) - \{1, e^{-i\lambda}\}$ et $\forall z_0 \in F, \sigma(z_0) = \dfrac{1}{1-z_0} + \dfrac{\alpha}{1-e^{i\lambda}z_0}$.

Deuxième partie : convergence au sens de Césaro

6. (a) • Soit $f \in \mathcal{E}$, alors f est combinaison linéaire finie des e_λ, or $\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} e^{i\lambda t}dt = \left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{sin(\lambda x)}{\lambda x} & si & \lambda \neq 0 \\ 1 & si & \lambda = 0 \end{array}\right.$,

donc $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} e^{i\lambda t}dt = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & si & \lambda \neq 0 \\ 1 & si & \lambda = 0 \end{array}\right.$ et par combinaison linéaire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt$ existe.

• $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{E}$, $\forall x > 0$, $\displaystyle\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f + \beta\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g$, et par passage à la limite, on obtient $M(\alpha f + g) = \alpha M(f) + \beta M(g)$, donc $f \longmapsto M(f)$ est linéaire.

• $\forall f \in \mathcal{E}$, $\forall x > 0$, $\displaystyle\left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt\right| \leq \|f\|_\infty$, donc par passage à la limite $|M(f)| \leq \|f\|_\infty$, d'où la continuité de $f \longmapsto M(f)$.

(b) • Soient $p \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels distincts deux à deux et $\alpha_1, ..., \alpha_p$ des complexes tels que $\forall t \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{i\lambda_k t} = 0$, alors en dérivant m fois , on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k (i\lambda_k)^m e^{i\lambda_k t} = 0$, donc on a le système $\forall m \in [[0, p-1]]$, $\forall k \in [[1, p]]$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \alpha_k (\lambda_k)^m = 0$ qui est un système de Cramer de discriminant $Vand(\lambda_1, ..., \lambda_p) \neq 0$, donc $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$.

• $M(e_\lambda) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & si & \lambda \neq 0 \\ 1 & si & \lambda = 0 \end{array}\right.$, donc $M(f)$ est la coordonnée de f dans la base $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$.

(c) • $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $e_\lambda e_\mu = e_{\lambda+\mu}$, donc $\mathcal{E}$ est stable par produit.

• $\forall f, g \in \mathcal{E}$, $\forall x > 0$, $\displaystyle\left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} fg\right| \leq \frac{1}{2|x|}\int_{-|x|}^{|x|} \|f\|_\infty g = \|f\|_\infty \left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} g\right|$, donc par passage à la limite, on obtient $|M(fg)| \leq \|f\|_\infty M(g)$.

7. (a) $\displaystyle K_N(t) = 1 + \sum_{j=1}^{N}\left(1 - \frac{j}{N+1}\right)(e^{ijt} + e^{-ijt}) = 1 + \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N}(N+1-j)cos(jt)$ et le changement d'indice $N+1-j \longleftarrow j$, donne $\displaystyle K_N(t) = 1 + \frac{2}{N+1}\sum_{j=1}^{N} jcos((N+1-j)t)$.

(b) • $\displaystyle sin\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=0}^{N} e^{i(\frac{N}{2}-k)t} = \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{N}\left(e^{-i(2k-1-N)\frac{t}{2}} - e^{-i(2k+1-N)\frac{t}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i(1+N)\frac{t}{2}} - e^{-i(1+N)\frac{t}{2}}\right) = sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)$.

• En levant les deux membres de l'égalité précédente au carré, on obtient :

$\displaystyle\left[\frac{sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]^2 = \left(\sum_{k=0}^{N} e^{i(\frac{N}{2}-k)t}\right)^2 = \sum_{j=0}^{2N}\sum_{p+q=j} e^{i(N-j)t}$, or

$Card\{(p,q) \in [[0,N]]^2 \ / \ p+q = j\} = \left\{\begin{array}{ccc} j+1 & si & j \in [[0,N]] \\ 2N-j+1 & si & j \in [[N+1, 2N]] \end{array}\right.$, ce qui entraine que

$\displaystyle\left[\frac{sin\left(\frac{N+1}{2}t\right)}{sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right]^2 = \sum_{j=0}^{N}(j+1)e^{i(N-j)t} + \sum_{j=N+1}^{2N}(2N-j+1)e^{i(N-j)t}$.

• Le changement d'indice $j \longleftarrow N-j$ donne $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}(j+1)e^{i(N-j)t} = \sum_{j=0}^{N}(N-j+1)e^{ijt}$ et le changement d'indice $j \longleftarrow j-N$, puis $j \longleftarrow -j$ donne $\displaystyle\sum_{j=N+1}^{2N}(2N-j+1)e^{i(N-j)t} = \sum_{j=1}^{N}(N-j+1)e^{-ijt} = \sum_{j=-N}^{-1}(N+j+1)e^{ijt}$.

• Ce qui donne finalement $\left[\dfrac{sin\left(\dfrac{N+1}{2}t\right)}{sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right]^2 = \sum_{j=-N}^{N}(N-|j|+1)e^{ijt}$, d'où l'égalité

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1}\left[\frac{sin\left(\dfrac{N+1}{2}t\right)}{sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}\right]^2$$

.

8. (a) • $g_N(x) = \prod_{p=1}^{n+1}\sum_{j=-N}^{N}\left(1-\dfrac{|j|}{N+1}\right)e^{ij(\lambda_p x+\alpha_p)} =$

$= \sum_{(k_1,\dots,k_{n+1})\in[[-N,N]]^{n+1}}\left(1-\dfrac{|k_1|}{N+1}\right)\dots\left(1-\dfrac{|k_{n+1}|}{N+1}\right)exp(i\sum_{p=1}^{n+1}k_p\alpha_p).e^{i\lambda x}$.

• La famille $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ est $\mathbb{Q}-$libre, donc $\lambda = 0$ si, et seulement si $k_1 = \dots = k_{n+1} = 0$.
$M(g_N)$ est la coordonnée de g_N suivant e_0, ceci correspond à $\lambda = 0$, donc c'est 1.

(b) Posons $g_N = \sum c_\lambda e_\lambda$ où $c_\lambda = \left(1-\dfrac{|k_1|}{N+1}\right)\dots\left(1-\dfrac{|k_{n+1}|}{N+1}\right)exp(i\sum_{p=1}^{n+1}k_p\alpha_p)$, alors $(fg_N)(x) = \sum c_\lambda r_0 e_\lambda + \sum_{j=1}^{n+1}\sum a_j c_\lambda e^{i(\lambda_j+\lambda)x}$, donc la coordonnée de fg_N suivant e_0 est : $c_0r_0+\sum_{j=1}^{n+1}a_jc_{-\lambda_j}$, or $\lambda = 0$ si, et seulement si $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1} = 0$ et $\lambda = -\lambda_j$ si, et seulement si $k_j = -1$ et $k_p = 0$ pour $p \neq j$, donc $c_0 = 1$ et $c_{-\lambda_j} = \left(1-\dfrac{1}{N+1}\right)e^{-i\alpha_j}$, ce qui entraine que :

$$M(fg_N) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1}a_j\left(1-\frac{1}{N+1}\right)e^{-i\alpha_j} = r_0 + \frac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1}r_j$$

(c) • D'une part $f(x) = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1}a_je^{i\lambda_jx}$, donc $\|f\|_\infty \leq r_0 + \sum_{j=1}^{n+1}|a_j| = r_0 + \sum_{j=1}^{n+1}r_j = \sum_{j=0}^{n+1}r_j$.
• D'autre part d'après la question 7, $K_N \in \mathcal{E}$ et elle est positive, donc par stabilité de $\mathcal{E}$ pour le produit, $g_N \in \mathcal{E}$ et positive, ce qui entraine en utilisant la question $6.c$, que
$\forall N \geq 0, r_0 + \dfrac{N}{N+1}\sum_{j=1}^{n+1}r_j = M(fg_N) \leq \|f\|_\infty M(g_N) = \|f\|_\infty$, donc en tendant N vers $+\infty$, on obtient $\sum_{j=0}^{n+1}r_j \leq \|f\|_\infty$.
• D'où l'égalité $\|f\|_\infty = \sum_{j=0}^{n+1}r_j$.

9. • Soient $k \neq j$, $m-\varepsilon \leq |u_1+\dots+u_m| \leq |u_k+u_j| + |\sum_{p\notin\{k,j\}}u_p| \leq |u_k+u_j| + m-2$, donc $|u_k+u_j| \geq 2-\varepsilon$.
• $|u_k+u_j|^2 + u_k - u_j|^2 = 2(|u_k|^2+|u_j|^2) = 4$, donc $|u_k-u_j|^2 = 4-|u_k+u_j|^2 \leq 4-(2-\varepsilon)^2 = 4\varepsilon-\varepsilon^2 \leq 4\varepsilon$, et par suite $|u_k-u_j| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$.

10. (a) Dans ce cas $\|f\|_\infty = n+2$, donc d'après la caractérisation de la borne supérieure, $\exists(x_m)_m \subset \mathbb{R}$ tels que $\lim_{m\longrightarrow+\infty}|f(x_m)| = n+2$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{m\longrightarrow+\infty}|f(x_m)| = n+2$, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N$, $|f(x_m)| \geq n+2-\varepsilon$, et par la question 9, on aura $|e^{i2\pi x_m}-1| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$ et $\forall j \in [[1,n]]$, $|e^{i\alpha_j}e^{i\lambda_jx_m}-1| \leq 2\sqrt{\varepsilon}$, c'est à dire

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}e^{i2\pi x_m} = 1 \text{ et } \lim_{n\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_jx_m = e^{-i\alpha_j}}$$

(c) • $\lim_{m\longrightarrow+\infty}e^{i2\pi y_m} = \lim_{m\longrightarrow+\infty}e^{i2\pi x_m} = 0$, donc $\lim_{m\longrightarrow+\infty}cos(2\pi y_m) = 1$ et $\lim_{m\longrightarrow+\infty}sin(2\pi y_m) = 0$, ce qui entraine, vu l'égalité $cos(2\pi y_m) = 2cos^2(\pi y_m)-1$, que $\lim_{m\longrightarrow+\infty}|cos(\pi y_m)| = 1$ et $\lim_{m\longrightarrow+\infty}|sin(\pi y_m)| = 0$, et par suite $\lim_{m\longrightarrow+\infty}tan(\pi y_m) = 0$, or $\pi y_m \in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, donc $\lim_{m\longrightarrow+\infty}(\pi y_m) = \lim_{m\longrightarrow+\infty}Arctan(tan(\pi y_m)) = 0$.
• $\lim_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_jN_m} = \lim_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_jx_m}\lim_{m\longrightarrow+\infty}e^{-i\lambda_jy_m} = e^{-i\alpha_j}$.

11. (a) Supposons que $\sup\limits_{x\in I}|f(x)|=n+2$, l'intervalle I étant compact, donc $\exists x_0\in I$ tel que $|f(x_0)|=|1-\sum\limits_{j=1}^{n}e^{i\lambda_j x_0}+e^{i2\pi x_0}|=n+2$, et par suite :

• $n+2\le|1+e^{i2\pi x_0}|+|\sum\limits_{j=1}^{n}e^{i\lambda_j x_0}|\le|1+e^{i2\pi x_0}|+n\le n+2$, donc $|1+e^{i2\pi x_0}|=2$, ce| qui exige que $x_0\in\mathbb{Z}$.

• De même on a $\forall k\in[[1,n]]$, $n+2\le|1-e^{i\lambda_k x_0}|+|\sum\limits_{j\neq k}e^{i\lambda_j x_0}|+|e^{i2\pi x_0}|\le|1-e^{i\lambda_k x_0}|+n\le n+2$, donc $\forall k\in[[1,n]],|1-e^{i\lambda_k x_0}|=2$, ce qui exige $\lambda_k x_0\in\pi+2\pi\mathbb{Z}$, et puisque $x_0\in\mathbb{Z}$, λ_k et 2π sont $\mathbb{Q}-$liés pour tout $k\in[[1,n]]$, donc la famille $(\lambda_1,...,\lambda_{n+1})$ est $\mathbb{Q}-$liée, ce qui contredit la $\mathbb{Q}-$liberté de la famille $(\lambda_1,...,\lambda_{n+1})$.

(b) La question précédente entraine que la suite $(x_m)_m$ n'est pas bornée et par suite aussi pour la suite $(N_m)_m$, donc on peut en extraire une sous-suite extraite $(N_{\varphi(m)})_m=(N'_m)_m$ tels que $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}N'_m=\pm\infty$ et $\forall j\in[[1,n]]$, $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_j N'_m}=\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_j N_{\varphi(m)}}=e^{-i\pi}=-1$.

- Les suites $(e^{i2\lambda_j N'_m})_m$ convergent vers 1.

12. • Dans la question $11.b$, on a $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_j N'_m}=\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{-i\lambda_j N'_m}=-1$,donc on peut prendre $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}N'_m=+\infty$.

• En prennant le conjugué dans la question 10, on obtient, $\exists(N_m)_m\subset\mathbb{Z}$ tel que pour tout $j\in[[1,n]]$, $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_j N_m}=e^{i\alpha_j}$.

• Considérons les ensembles $H_{\mathbb{N}}=\{(e^{i\lambda_1 p},...,e^{i\lambda_n p})\ /\ p\in\mathbb{N}\}$, $H_{\mathbb{Z}}=\{(e^{i\lambda_1 p},...,e^{i\lambda_n p})\ /\ p\in\mathbb{Z}\}$ et le n-uplet $G=(e^{i\alpha_1},...,e^{i\alpha_n})$.

$\forall p\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_j(2N'_m+p)}=e^{i\lambda_j p}$ et $(2N'_m+p)_m\subset\mathbb{N}$ à partir d'un certain rang, donc quitte à prendre ses premiers termes dans $\mathbb{N}$, on peut la considérer comme suite dans $\mathbb{N}$, et par suite $H_{\mathbb{Z}}\subset\overline{H_{\mathbb{N}}}$, c'est à dire $\forall p\in\mathbb{Z}\ \exists(N_m)_m\subset\mathbb{N}$ tendant vers $+\infty$, tel que $\forall j\in[[1,n]]$, $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{i\lambda_j N_m}=e^{i\lambda_j p}$.

• La question $10.c$, montre que $G\in\overline{H_{\mathbb{Z}}}$, or $\overline{H_{\mathbb{Z}}}\subset\overline{H_{\mathbb{N}}}$, donc $G\in\overline{H_{\mathbb{N}}}$, ce qui établit le théorème.

Troisième partie : valeurs d'adhérence aux points de C-convergence

13. (a) • Si $\dfrac{x}{\pi}=\dfrac{p}{q}$ où $p\wedge q=1$, alors S_n prend les seules valeurs $S_0,S_1,...,S_{2q-1}$, donc $\mathcal{L}(e^{ix})=\{S_0,S_1,...,S_{2q-1}\}$.

• Si $\dfrac{x}{\pi}\notin\mathbb{Q}$, alors (x,π) est libre sur $\mathbb{Q}$, donc d'après le théorème de Kronecker $\forall\theta\in\mathbb{R}\ \exists(N_m)_m\subset\mathbb{N}$ tendant vers $+\infty$ tels que $\lim\limits_{m\longrightarrow+\infty}e^{iN_m x}=e^{i\theta}$, donc $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1-e^{ix}}$ est une valeur d'adhérence de $\sum e^{inx}$.

-Réciproquement Soit l une valeur d'adhérence de $\sum e^{inx}$, alors il existe une sous-suite extraite $(S_{\varphi(n)})_n$ convergente vers l, donc $(e^{i(\varphi(n)+1)x})_n$ converge vers un certain $e^{i\theta}$, donc $l=\dfrac{1-e^{i\theta}}{1-e^{ix}}$.

• En conclusion $\mathcal{L}(e^{ix})=\{\dfrac{1-e^{i\theta}}{1-e^{ix}}\ /\ \theta\in\mathbb{R}\}$, c'est le cercle de centre $\sigma(e^{ix})=\dfrac{1}{1-e^{ix}}$ et de rayon $\dfrac{1}{|1-e^{ix}|}$.

(b) • $S_{2n}(e^{ix})=\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{i2x}}-\dfrac{\alpha e^{ix}+(\alpha+\beta)}{1-e^{i2x}}e^{i(2n+1)x}$, donc d'après le théorème de Kronecker, l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(S_{2n})_n$ est l'ensemble $\{\sigma(e^{ix})-\dfrac{\alpha e^{ix}+(\alpha+\beta)}{1-e^{i2x}}e^{i\theta}\ /\ \theta\in\mathbb{R}\}$, c'est le cercle C_1 de centre $\sigma(e^{ix})$ est de rayon $r_1=\left|\dfrac{\alpha e^{ix}+(\alpha+\beta)}{1-e^{i2x}}\right|$.

• $S_{2n+1}(e^{ix})=\sigma(e^{ix})-\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{i2x}}e^{i(2n+2)x}$, donc, d'après le théorème de Kronecker, les valeurs d'adhérence de $(S_{2n+1})_n$ est l'ensemble $\{\sigma(e^{ix})-\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{i2x}}e^{i\varphi}\ /\ \varphi\in\mathbb{R}\}$, c'est le cercle C_2 de centre $\sigma(e^{ix})$ et de rayon $r_2=\left|\dfrac{\alpha+(\alpha+\beta)e^{ix}}{1-e^{i2x}}\right|$.

• En conclusion

$$\mathcal{L}(e^{ix})=C_1\cup C_2$$

(c) $S_n(e^{ix}) = \sigma(e^{ix}) - \dfrac{e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} - \alpha\dfrac{e^{i(n+1)(\lambda+x)}}{1-e^{i(\lambda+x)}}$, donc, d'après le théorème de Kronecker, $\mathcal{L}(e^{ix}) = \{\sigma(e^{ix}) - \dfrac{e^{i\theta_1}}{1-e^{ix}} - \alpha\dfrac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{1-e^{i(\lambda+x)}} \ / \ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}\}$ • Soit $\zeta \in \mathcal{L}(e^{ix})$, $|\zeta - \sigma(e^{ix})|^2 = \left|\dfrac{1}{1-e^{ix}} + \alpha\dfrac{e^{i\theta_2}}{1-e^{i(\lambda+x)}}\right|^2 =$

$= \dfrac{1}{4sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} + \dfrac{\alpha^2}{4sin^2\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)} + 2Re\left(\dfrac{e^{i\theta_2}}{(1-e^{-ix})(1-e^{i(\lambda+x)})}\right)$, or

$Re\left(\dfrac{e^{i\theta_2}}{(1-e^{-ix})(1-e^{i(\lambda+x)})}\right) = \dfrac{cos\left(\theta_2 - \frac{\lambda}{2}\right)}{4sin\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$ et $cos\left(\theta_2 - \frac{\lambda}{2}\right) \in [-1,1]$, donc $|\zeta - \sigma(e^{ix})|^2 \in [r_1^2, r_2^2]$ où $r_1^2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} - \dfrac{\alpha}{\left|sin\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)\right|}\right)^2$ et $r_2^2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + \dfrac{\alpha}{\left|sin\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)\right|}\right)^2$, donc pour $\alpha \in \left]0, \dfrac{\left|sin\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)\right|}{\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\right[$, $|\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]$ où

$r_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} - \dfrac{\alpha}{\left|sin\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)\right|}\right)$ et $r_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\left|sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + \dfrac{\alpha}{\left|sin\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)\right|}\right)$.

• Réciproquement, soit $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $|\zeta - \sigma(e^{ix})| \in [r_1, r_2]$, alors

$|\zeta - \sigma(e^{ix})|^2 - \dfrac{1}{4sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} - \dfrac{\alpha^2}{4sin^2\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)} \in \left[\dfrac{-\alpha}{2\left|sin\left(\dfrac{x}{2}\right)sin\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)\right|}, \dfrac{\alpha}{2\left|sin\left(\dfrac{x}{2}\right)sin\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)\right|}\right]$,

d'où l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$|\zeta - \sigma(e^{ix})|^2 - \dfrac{1}{4sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)} - \dfrac{\alpha^2}{4sin^2\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)} = \dfrac{\alpha cos(\theta)}{2sin\left(\dfrac{x}{2}\right)sin\left(\dfrac{\lambda+x}{2}\right)} = 2Re\left(\dfrac{e^{i(\theta+\frac{\lambda}{2})}}{(1-e^{-ix})(1-e^{i(\lambda+x)})}\right)$,

et par suite $|\zeta - \sigma(e^{ix})| = \left|\dfrac{1}{1-e^{ix}} + \alpha\dfrac{e^{i(\theta+\frac{\lambda}{2})}}{1-e^{i(\lambda+x)}}\right|$, ce qui entraine l'existence de $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$\zeta - \sigma(e^{ix}) = e^{i\varphi}\dfrac{1}{1-e^{ix}} + \alpha\dfrac{e^{i(\theta+\frac{\lambda}{2})}}{1-e^{i(\lambda+x)}}$, c'est à dire que $\zeta \in \mathcal{L}(e^{ix})$.