CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

I : PREMIER EXERCICE

I.1. On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq 1\}$, calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

II : DEUXIEME EXERCICE

a et b étant deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note l'équation différentielle

$$(E): \quad x^2\,y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \; .$$

On note S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.1. Donner la dimension des espaces vectoriels S^+ et S^-.

II.2. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de la fonction f à l'intervalle J.

Donner le noyau de l'application φ et en déduire que $\dim S \leq 4$.

II.3. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E): \quad x^2y'' + xy' = 0 \; .$$

Déterminer S^+ et S^-.

Déterminer ensuite S et donner sans détails la dimension de S.

II.4. Dans cette question $(E) : x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$.

Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \longmapsto x^\alpha$ (α réel).

En déduire S^+ puis S^-.

Déterminer S et donner la dimension de S.

II.5. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim S = 0$ (on détaillera).

On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

III : PROBLEME

Première partie : convergence de séries par transformation d'Abel

III.1. On considère une suite de réels (a_n), une suite de complexes (b_n) et on note pour tout entier naturel n : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

En remarquant que, pour $k \geq 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n$ (transformation d'Abel).

III.2. On suppose que la suite (B_n) est bornée et que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle.

III.2.a Démontrer que la série $\sum\limits_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})$ converge.

III.2.b En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ converge.

III.2.c En appliquant le résultat précédent au cas où $b_n = (-1)^n$, donner une démonstration du théorème des séries alternées, après l'avoir énoncé.

III.3. Exemple.

Dans cette question, θ est un réel différent de $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

III.3.a Calculer pour n entier naturel non nul, $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$.

III.3.b Discuter en fonction du réel α la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$.

III.4. Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$.

On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une série de complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si, les deux séries ayant pour termes généraux les parties réelles et parties imaginaires (c'est-à-dire $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$) convergent.

On notera U sa fonction somme : pour tout réel x, $U(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

Deuxième partie : convergence uniforme de séries

III.5. On considère une suite de réels (a_n) et (f_n) une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

On pose, pour tout $z \in A$ et pour tout entier naturel n, $F_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(z)$.

On suppose que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $z \in A$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|F_n(z)| \leq M$ (on dit que la suite (F_n) est uniformément bornée).

III.5.a Démontrer que la suite $(a_n F_n)$ converge uniformément sur A et que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geq 0}(a_k - a_{k+1})F_k$ converge normalement sur A.

III.5.b A l'aide d'une transformation d'Abel, en déduire que la série de fonctions $\sum a_n f_n$ converge uniformément sur A.

III.6. Exemple.

Pour x réel et n entier naturel non nul, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$.

III.6.a Démontrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{ix} = -2\,i\sin(x/2)e^{i\,x/2}$.

Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, 2\pi - a]$ où $a \in]0, \pi[$.

En déduire que la fonction U est continue sur l'intervalle $]0, 2\pi[$.

III.6.b Pour p entier naturel, on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ où pour x réel et n entier naturel non nul, $v_n(x) = \dfrac{\sin(nx)\sin(px)}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel p, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

On pourra, par exemple, utiliser sans démonstration, que :

$$\text{pour tout} \qquad x \in [0, \pi]\,, \quad \frac{x}{\pi} \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) .$$

III.6.c On se propose dans cette question de démontrer que la fonction U n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que la fonction U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

i. Déterminer alors les coefficients de Fourier de la fonction U.

On pourra utiliser pour p et n entiers naturels non nuls :

$$p \neq n, \quad \int_0^{\pi} \sin(nx)\sin(px)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et pour } p = n \quad \int_0^{\pi} \sin(nx)\,\sin(px)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} .$$

ii. En utilisant la formule de Parseval, aboutir à une contradiction.

Troisième partie : convergence uniforme d'une série entière

III.7. Si $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière de la variable complexe de rayon $R > 0$, rappeler le résultat du cours concernant la convergence uniforme de cette série.

III.8. On considère la série entière de la variable complexe $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ de rayon 1.

III.8.a On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Démontrer que la série entière de la variable réelle $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$ (en particulier la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ ne converge pas uniformément sur D).

III.8.b On pourra confondre un point de $\mathbb{R}^2$ et son affixe.

Pour $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on note D_α l'ensemble des complexes z, tels que $|z| \leq 1$ et dont la partie réelle vérifie $\mathrm{Re}(z) \leq \cos\alpha$.

Représenter géométriquement l'ensemble D_α dans un repère orthonormé du plan.

III.8.c Démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{C}$.

On pourra écrire :

$$D_\alpha = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\right\} \cap \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq \cos\alpha\right\}$$

et démontrer que D_α est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que D_α est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

III.8.d On note pour $z \in \mathbb{C}$ et n entier naturel, $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$.

Démontrer que pour tout $z \in D_\alpha$ et tout entier naturel n, si $x = \mathrm{Re}(z)$:

$$|F_n(z)| \leq \frac{2}{1-x} \leq \frac{2}{1-\cos\alpha}\ .$$

III.8.e Démontrer que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur tous les compacts D_α $\left(\text{pour } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 14 1305 – D'après documents fournis