

Correction

Partie I

- 1.a Soit $z \in U \setminus \{1\}$. On peut écrire $z = e^{i\theta}$ et alors avec $\theta \in]0, 2\pi[$.
- $$h(z) = i \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = i \frac{2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}}{-2i \sin(\theta/2) e^{i\theta/2}} = -\cot \theta \in \mathbb{R}.$$
- 1.b Soit $z \in D$. $h(z) = i \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{|1-z|^2} = -\frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|1-z|^2} + i \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \in P$ car $|z| < 1$.
- 2.a $h(z) = z \Leftrightarrow z^2 + (i-1)z + i = 0$. $\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i = (\sqrt{3}(1-i))^2$.
- Les solutions sont $(1-i) \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.
- 2.b Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. $h(z) = Z \Leftrightarrow (1+z) = iZ(z-1) \Leftrightarrow z = \frac{-1-iZ}{1-iZ} = \frac{Z-i}{Z+i}$
- 3.a Soit $z \in \mathbb{R}$. $|g(z)| = \frac{|z-i|}{|z+i|} = \sqrt{\frac{z^2+1}{z^2+1}} = 1$ donc $z \in U$.
- 2.b Soit $z \in P$. $|g(z)| = \frac{|z-i|}{|z+i|}$ or $|z-i|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z)-1)^2$ et $|z+i|^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + (\operatorname{Im}(z)+1)^2$ donc $|z-i| < |z+i|$ car $\operatorname{Im}(z) > 0$ et par suite $g(z) \in D$.

Partie II

1. $\forall z \in U$, on a $|h(z)| = \left| \frac{e^{i\theta}}{z} \right| = 1$ donc $h(z) \in U$.
- 2.a La condition $ad - bc \neq 0$ impose $e^{i\theta} \times 1 - \alpha e^{i\theta} \bar{\alpha} \neq 0$ i.e. $|\alpha| \neq 1$ d'où $\alpha \notin U$.
De plus $\forall z \in U$, $z \neq -1/\bar{\alpha}$ donc h est définie sur U .
- 2.b $h(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$. On a $|h(z)| = \frac{|z + \alpha|}{|\bar{\alpha}z + 1|} \times \frac{|\bar{z}|}{|z|} = \frac{|z + \alpha||\bar{z}|}{|\bar{\alpha} + \bar{\alpha}|} = 1$.
- 3.a $|\alpha + \beta|^2 = (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta}) = \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta)$ car $\alpha\bar{\beta} = \overline{\bar{\alpha}\beta}$.
- 3.b Supposons $\forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = |b|e^{i\alpha}$ ($\alpha = \arg(b)$ $[2\pi]$ si $b \neq 0$, α quelconque sinon).
Pour $\theta = \alpha$: $a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = a + 2\operatorname{Re}(|b|) = a + 2|b| = 0$.
Pour $\theta = \alpha + \pi$: $a + 2\operatorname{Re}(be^{-i\theta}) = a + 2\operatorname{Re}(-|b|) = a - 2|b| = 0$.
Le système $\begin{cases} a + 2|b| = 0 \\ a - 2|b| = 0 \end{cases}$ implique $a = 0$ et $|b| = 0$ i.e. $b = 0$.
- 4.a $h(e^{i\theta}) = \frac{ae^{i\theta} + b}{ce^{i\theta} + d}$. $|h(e^{i\theta})| = 1$ implique $|ae^{i\theta} + b|^2 = |ce^{i\theta} + d|^2$ d'où
 $\forall \theta \in \mathbb{R}, |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{c}de^{-i\theta})$.
- 4.b $\forall \theta \in \mathbb{R}$, on a $(|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2) + 2\operatorname{Re}((\bar{a}b - \bar{c}d)e^{-i\theta}) = 0$ d'où
 $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 0 \\ \bar{a}b - \bar{c}d = 0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 & (1) \\ \bar{a}b = \bar{c}d & (2) \end{cases}$.

4.c Supposons $a = 0$. (2) donne $\bar{c}d = 0$, or $ad - bc \neq 0$ donc $c \neq 0$ et par suite $d = 0$.

(1) donne alors $|b| = |c|$ ce qui permet d'écrire $b = e^{i\theta} c$ et alors $h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{e^{i\theta}}{z}$.

4.d Supposons $a \neq 0$. (2) donne $b = \frac{\bar{c}d}{a}$ et $|a|^2 \times$ (1) donne alors $|a|^4 + |c|^2 |d|^2 - |a|^2 |c|^2 - |a|^2 |d|^2 = 0$ d'où $(|c|^2 - |a|^2)(|d|^2 - |a|^2) = 0$.

4.e Supposons $|a| = |c|$. On peut alors écrire $a = ce^{i\theta}$ et $b = de^{-i\theta}$ mais alors $ad - bc = 0$ qui est exclu.

4.f Supposons $|a| = |d|$. On peut alors écrire $a = de^{i\theta}$ et $b = \frac{\bar{c}de^{i\theta}}{\bar{d}}$ et alors

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d} = e^{i\theta} \frac{z + \frac{\bar{c}}{\bar{d}}}{\frac{c}{d}z + 1} = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\alpha z + 1} \text{ avec } \alpha = \frac{\bar{c}}{\bar{d}} \in \mathbb{C}.$$

Enfin la condition $ad - bc \neq 0$ donne $d^2 e^{i\theta} - \frac{c\bar{c}d}{\bar{d}} e^{i\theta} \neq 0$ donc $|c| \neq |d|$ puis $\alpha \notin U$.

Finalement h est du type annoncé.