Mines - Ponts 2020 Math II - Corrigé

A - Préliminaires

1. Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, notons $[P]_k$ son coefficient relatif au terme en X^k. On a alors
$$\binom{2n}{n} = [(X+1)^{2n}]_n = [(X+1)^n(X+1)^n)]_n = \sum_{k=0}^{n}[(X+1)^n]_k[(X+1)^n]_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$
grâce à la symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$. On en déduit que
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{2\pi\ 2n}}{2\pi n}\frac{(2n/e)^{2n}}{(n/e)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{4^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, on peut encadrer l'intégrale pour $k \geqslant 1$:
$$\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \frac{1}{(k+1)^\alpha}.$$
En sommant ces inégalités pour k compris entre 1 et $n-1$, on obtient, en posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$:
$$S_n - \frac{1}{n^\alpha} \geqslant \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \geqslant S_n - 1,$$
d'où le contrôle $S_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} + \mathcal{O}(1)$. Or $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ d'où le résultat, un peu plus fort que ce qui est demandé :
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \mathcal{O}(1)$$
et l'équivalent recherché. L'alternative est d'utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison, mais c'est un peu plus technique.

Prenons maintenant $\alpha > 1$. L'encadrement précédent fournit, lorsque l'on somme pour k allant de n à $p \geqslant n$:
$$\sum_{k=n}^{p}\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_n^{p+1}\frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \sum_{k=n+1}^{p+1}\frac{1}{k^\alpha}.$$
Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge, tout autant que l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$, donc on peut laisser tendre p vers $+\infty$ pour obtenir
$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} \geqslant \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}.$$
D'où le résultat : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$, légèrement meilleur que l'équivalent demandé.

4. Le résultat provient d'une intégration par parties : on intègre $t \mapsto 1$ et on dérive $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$; les hypothèses sont justifiées par le fait que la première fonction est continue et la deuxième $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[2, x]$. On obtient bien

$$I(x) = \left[\frac{t}{\ln t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{t \cdot \frac{1}{t}}{\ln^2(t)} dt = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)^2}.$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\ln t}$ est positive mais n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$, et que $\dfrac{1}{\ln(t)^2}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{\ln t}$ en $+\infty$, le théorème d'intégration des relations de comparaison s'applique et on en déduit que $x \mapsto \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)^2}$ est négligeable devant $I(x)$ en $+\infty$.

Enfin, comme $I(x)$ tend vers $+\infty$, on a le développement $I(x) = \dfrac{x}{\ln x} + o(I(x))$ et donc $I(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$.

5. On rappelle le développement en série entière : $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, où le coefficient binomial généralisé est défini par $\dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. Ce développement est convergent et valable pour $x \in]-1, 1[$. En particulier, on a

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{k!}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs, il vient

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{(2k)!}{k! \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2k} = (-1)^k \frac{1}{4^k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} = (-1)^k \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

On en déduit que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k.$

B. Marches aléatoires, récurrence

6. On a, pour tout n, $|\mathbb{P}(S_n = 0)| \leqslant 1$ et $|\mathbb{P}(R = n)| \leqslant 1$, donc par le lemme d'Abel, le rayon des séries entières est supérieur ou égal à 1. En tant que somme de séries entières, F et G sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence, ici $]-1, 1[$.

Comme R est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n)$ converge, et de plus on a

$$1 = \mathbb{P}(R = +\infty) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n).$$

Ainsi, la série entière définissant G est normalement convergente sur le segment $[-1, 1]$. Chacune des fonctions $x \mapsto \mathbb{P}(R = n)x^n$ étant continue sur $[-1, 1]$, le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique et G est définie et continue sur $[-1, 1]$. De plus

$$G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) = 1 - \mathbb{P}(R = +\infty) = \mathbb{P}(R \neq +\infty).$$

7. On a l'égalité d'événements

$$(S_n = 0_d) \cap (R = k) = (R = k) \cap (S_n = S_k) = (R = k) \cap \Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0\Big).$$

La force de conviction et l'invocation du lemme des coalitions pourrait justifier directement que ces deux événements sont indépendants. Voyons-le avec les outils du programme. Le lemme des coalitions dit que comme $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes, alors deux variables s'exprimant $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots X_n)$ sont indépendantes. Or on a l'égalité d'événements

$$(R = k) = \Big(\sum_{j=1}^{k} X_j = 0 \Big) \cap \bigcap_{p=1}^{k-1} \Big(\sum_{j=1}^{p} X_j \neq 0 \Big)$$

d'où l'on tire l'égalité de variables indicatrices

$$\mathbf{1}_{R=k} = \mathbf{1}_{\sum_{j=1}^{k} X_j = 0} \cdot \prod_{p=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\sum_{j=1}^{p} X_j \neq 0} = f(X_1, \dots, X_k).$$

Pour une fonction f ad hoc. De même,

$$\mathbf{1}_{\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0} = g(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

pour une fonction g ajustée. Ainsi les deux indicatrices sont indépendantes, donc les événements associés le sont. Ainsi,

$$\prod \big((S_n = 0_d) \cap (R = k) \big) = \mathbb{P}(R = k)\ \mathbb{P}\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0 \Big).$$

Maintenant, on invoque l'indépendance mutuelle pour justifier que les $(n-k)$-uples $(X_1, \dots, X_{n-k})$ et $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ ont même loi, pour en déduire que

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{j=k+1}^{n} X_j = 0 \Big) = \mathbb{P}\Big(\sum_{j=1}^{n-k} X_j = 0 \Big) = \mathbb{P}\big(S_{n-k} = 0_d \big).$$

Maintenant, on a l'inclusion $(S_n = 0) \subset (R \leqslant n)$, d'où l'on tire l'égalité d'événements

$$(S_n = 0) = (S_n = 0) \cap (R \leqslant n) = \bigcup_{k=1}^{n} (S_n = 0) \cap (R = k),$$

la réunion sur k étant de plus une réunion disjointe. On en déduit que

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big((S_n = 0_d) \cap (R = k) \big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k)\ \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

8. Fixons $x \in]-1, 1[$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(S_n = 0) x^n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k) x^k \cdot \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d) x^{n-k},$$

et on reconnaît dans le terme de droite le terme général du produit de Cauchy des séries absolument convergentes $F(x)$ et $G(x)$. Le théorème sur le produit de Cauchy permet de sommer la relation précédente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n = F(x) - 1 = F(x) G(x)$$

ce qui est le résultat demandé. La formule se récrit $F(x) = \dfrac{1}{1 - G(x)}$ pour $x \in]-1, 1[$. On en déduit que

- Si $\mathbb{P}(R \neq \infty) = 1$, alors $G(x)$ tend vers 1 par valeurs inférieures lorsque x tend vers 1^-, et donc $F(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.
- Si $\mathbb{P}(R \neq \infty) < 1$, alors par continuité de G, $F(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1 - G(1)} = \dfrac{1}{\mathbb{P}(R = +\infty)}$.

9. Aucun théorème ne couvre cette situation, il faut montrer la divergence *à la main.* Fixons $A > 0$; comme la série à termes positifs $\sum c_k$ diverge, il existe un rang N pour lequel $\sum_{k=0}^{N} c_k \geqslant A+1$. La fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{N} c_k x^k$ tend vers $\sum_{k=0}^{N} c_k \geqslant A+1$ quand x tend vers 1^-, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \geqslant A.$$

Alors, si $x \in]1-\alpha, 1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geqslant \sum_{k=0}^{N} c_k x^k \geqslant A$; rappelons pour cela que les $c_k x^k$ sont positifs. On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

10. Par application de la question 10, si $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ diverge, alors $F(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$. Par le même argument exercé sur G à la question 6, si $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ converge, alors $F(x)$ tend vers $\ell = \sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$ en 1. On a donc l'équivalence

$$\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) \text{ diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty \quad \underset{Q8}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1.$$

11. On a l'égalité d'événements

$$(Y_i = 1) = \Big(\forall k \leqslant i-1, S_i \neq S_k\Big) = \Big(\forall k \leqslant i-1, \sum_{j=k+1}^{i} X_j \neq 0\Big).$$

On utilise maintenant une astuce non donnée par l'énoncé : par mutuelle indépendance, $(X_1, \ldots, X_i)$ et $(X_i, X_{i-1}, \ldots, X_1)$ sont des i-uples de même loi. On en déduit l'égalité des probabilités :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\forall k \leqslant i-1, \sum_{j=k+1}^{i} X_j \neq 0\Big) &= \mathbb{P}\Big(\forall k \leqslant i-1, \sum_{j=k+1}^{i} X_{i+1-j} \neq 0\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\forall k \leqslant i-1, \sum_{j'=1}^{i-k} X'_j \neq 0\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\forall k' \in [\![1, i]\!], S_{k'} \neq 0\Big) = \mathbb{P}(R > i).
\end{aligned}$$

Or, on a l'égalité de variables aléatoires $N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Toutes les variables sont bornées donc admettent une espérance, et l'espérance d'une variable de Bernoulli est égale à la probabilité que cette variable soit égale à 1 :

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = 1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i).$$

12. On a l'inclusion $(R > i) \supset (R > i+1)$ et $\bigcap_{i\geqslant 1} (R > i) = (R = +\infty)$. Donc par continuité décroissante, $\mathbb{P}(R > i) \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(R = +\infty)$. Le théorème de Cesàro conduit alors au résultat : $\dfrac{\mathbb{E}(N_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(R = +\infty)$.

C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

13. Les variables $Y_i = \dfrac{X_i + 1}{2}$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre p et sont mutuellement indépendantes. Et $S_n = 2\sum_{i=1}^{n} Y_i - n$. Donc

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{2n+1} Y_i = \frac{2n+1}{2}\Big) = 0.$$

De même, $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{2n} Y_i = n\Big)$. Or la variable $\sum_{i=1}^{2n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres $(2n, p)$, donc

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

14. On a $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} (4pqx^2)^n = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4pqx^2}}$ en utilisant la formule de la question 5. Donc

$$G(x) = 1 - \frac{1}{F(x)} = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}.$$

On sait depuis la question 6 que

$$\mathbb{P}(R = +\infty) = 1 - G(1) = \sqrt{1 - 4pq} = \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = |1 - 2p| = |p - q|.$$

La loi de R s'obtient en retrouvant le développement en série entière de G. On a d'après la question 5,

$$G(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (4pq)^n (-1)^n x^{2n}.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(R = 2n + 1) = 0$ pour tout n, et pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(R = 2n) = -(-1)^n \binom{1/2}{n} (4pq)^n.$$

Un calcul similaire à celui de la question 5 conduit à $\dbinom{1/2}{n} = (-1)^{n-1} \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}$, et donc

$$\mathbb{P}(R = 2n) = 2(pq)^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

15. Lorsque $p = q = \dfrac{1}{2}$, on a $\mathbb{P}(R = 2n) = \dfrac{2}{4^n} \dfrac{1}{n} \dbinom{2n-2}{n-1} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$ d'après l'équivalent obtenu à la question 2.

Le théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent) affirme alors que

$$\mathbb{P}(R > i) = \sum_{k > \frac{i}{2}} \mathbb{P}(R = 2k) \sim \sum_{k > \frac{i}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \underset{Q3}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{i}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

On applique à nouveau le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent) et la question 3 pour obtenir

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

D. Un résultat asymptotique

16. Comme pour tout $k \leqslant n$ la quantité b_{n-k} est positive, on a $a_k b_{n-k} \geqslant a_n b_{n-k}$ et

$$1 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \geqslant a_n \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} = a_n B_n, \text{ d'où la première inégalité : } a_n \leqslant \frac{1}{B_n}.$$

Pour l'autre inégalité on a $a_k \leqslant a_0$ si $k \leqslant n$ et $a_k \leqslant a_n$ si $k \geqslant n$. Alors

$$1 = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} \leqslant a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^{m} b_{m-k} = a_0 \sum_{j=m-n+1}^{m} b_j + a_n \sum_{j=0}^{m-n} b_j = a_0(B_m - B_{m-n}) + a_n B_{m-n}.$$

17. L'inégalité de la question 15 fournit l'encadrement

$$\frac{1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n - n})}{B_{m_n - n}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{B_n}.$$

Par les hypothèses faites sur m_n, le terme de gauche est équivalent à B_n. Donc par le théorème d'encadrement a_n est équivalent à $\dfrac{1}{B_n}$.

18. On sait déjà, par le théorème de sommation des relations de comparaison, que B_n est équivalent à $C \ln n$. Si B_n était égal à $C \ln n$, le choix (à trouver avec imagination) de $m = n \ln n$ conviendrait. Vérifions-le plus précisément en posant $m_n = \lfloor n \ln n \rfloor$: on a déjà que $m_n \sim n \ln n$, et que $m_n - n = n(\ln n - 1) + \mathcal{O}(1) \sim n \ln n$. D'abord,

$$B_{m_n - n} \sim C \ln(m_n - n) = C(\ln(n \ln n) + o(1)) = C \ln n + C \ln \ln n + o(1) \sim C \ln n \sim B_n.$$

Pour la deuxième contrainte, comme $b_n \sim \dfrac{C}{n}$, la suite $n b_n$ est convergente donc bornée : il existe D tel que $b_n \leqslant \dfrac{D}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$. On déduit de ceci que

$$0 \leqslant B_{m_n} - B_{m_n - n} \leqslant \sum_{k=m_n - n}^{m_n} \frac{D}{k} \leqslant D \frac{n}{m_n - n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

E. Théorème d'Erdös et Dvoretzky

19. Posons $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R > k) x^k$, qui est définie sur $]-1, 1[$. On a $xH(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R > k-1) x^k$, donc

$$H(x) - xH(x) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} \big(\mathbb{P}(R > k) - \mathbb{P}(R > k-1)\big) x^k = 1 - \sum_{k \geqslant 1} P(R = k) x^k = 1 - G(x).$$

Ainsi, $H(x) = \dfrac{1 - G(x)}{1 - x}$. Donc par la formule de la question 8,

$$H(x)F(x) = \frac{F(x) - F(x)G(x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Il ne reste plus qu'à identifier le développement de Cauchy de $H(x)F(x)$ avec celui de $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n \geqslant 0} x^n$ pour obtenir

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0_d) \mathbb{P}(R > n - k).$$

Notons que cette relation est encore valable pour $n = 0$.

20. Fixons n, et notons A (resp. B, C, D) la variable aléatoire correspondant au nombre d'entiers $k \in [\![1, 2n]\!]$ tels que $X_k = (0, 1)$ (resp. $(0, -1), (1, 0), (-1, 0)$). L'événement $S_{2n} = 0$ s'écrit alors $(A = B) \cap (C = D)$. Alors (A, B, C, D) suit une loi multinomiale (hors programme) de paramètres $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$: pour chaque quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tels que $a + b + c + d = 2n$,

$$\mathbb{P}(A = a, B = b, C = c, D = d) = \frac{(2n)!}{a!\ b!\ c!\ d!} \frac{1}{4^{2n}}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{a+c=n} \frac{(2n)!}{(a!)^2 (c!)^2} \frac{1}{4^{2n}} \\
&= \frac{(2n)!}{4^{2n} (n!)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!^2} \\
&= \frac{\binom{2n}{n}}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \left(\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2
\end{aligned}$$

grâce à la première question.

21. On déduit de la question précédente et de la question 2 l'équivalent $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \dfrac{1}{\pi n}$.

La question 19 se récrit pour chaque n :

$$1 = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(R > 2n - k) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(R > k)\mathbb{P}(S_{2n-k} = 0) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(R > 2k)}_{a_k} \underbrace{\mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)}_{b_{n-k}}$$

puisqu'il est assez clair que $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$ pour tout n. Et $b_n \sim \dfrac{1}{\pi n}$. La partie **D** s'applique car :

$$a_k, b_k \text{ sont strictement positifs}, \qquad a_k \text{ décroît}, \qquad b_n \sim \frac{1}{\pi n}.$$

On en déduit le premier résultat : $\mathbb{P}(R > 2n) \sim \dfrac{1}{\pi \ln n}$. Maintenant, comme la suite $\big(\mathbb{P}(R > n)\big)_n$ est décroissante, on a

$$\mathbb{P}(R > 2\lfloor n/2 \rfloor) \geqslant \mathbb{P}(R > n) \geqslant \mathbb{P}(R > 2\lceil n/2 \rceil).$$

Et le terme de gauche $\mathbb{P}(R > 2\lfloor n/2 \rfloor) \sim \dfrac{1}{\pi \ln\lfloor n/2 \rfloor} = \dfrac{1}{\pi\big(\ln n - \ln 2 + o(1)\big)} \sim \dfrac{1}{\pi \ln n}$ et il en est de même du terme de droite. Donc on arrive à

$$\mathbb{P}(R > n) \sim \frac{1}{\pi \ln n}.$$

Le théorème de sommation des relations de comparaison s'applique alors sur la formule de la question 11 pour en déduire que

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\pi \ln n}.$$

Enfin, une comparaison série-intégrale dans le style de la question 3 fournit

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\pi \ln n} = \int_2^n \frac{dt}{\pi \ln t} + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{\pi} I(n) + \mathcal{O}(1).$$

On conclut avec l'équivalent obtenu à la question 4 :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi \ln n}.$$