Extrait

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on désigne par $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et on note par $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E, (une forme linéaire sur E est une application linéaire de E sur $\mathbb{R}$). On rappelle qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel supplémentaire à une droite vectorielle dans E. La matrice transposée de M est notée ${}^tM$. Si $M \in E$, on note $\text{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par M. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note $[\![1, n]\!] = \{1, ..., s\}$.
On définit l'application trace, notée Tr, de E vers $\mathbb{R}$ comme suit, pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in E$, $\text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}$.
L'objet du problème est de montrer, dans la partie V, que tout hyperplan vectoriel de E contient au moins une matrice inversible et dans la partie VI, que tout hyperplan vectoriel de E qui est muni d'un produit scalaire, contient au moins une matrice orthogonale.

Partie I
Étude de quelques propriétés de l'application trace

1. (a) Montrer que Tr est une forme linéaire.
   (b) Montrer que pour tous éléments A et B de E, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(({}^tA)({}^tB))$.
   (c) Déterminer la dimension de $\ker \text{Tr}$.
   (d) Montrer que $E = \ker \text{Tr} \oplus \text{Vect}(I_n)$.
   (e) Vérifier que $\ker \text{Tr}$ est un hyperplan de E qui contient au moins une matrice inversible.

1) a) M que tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

C'àd Mq: $tr \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

On a bien que tr est une application de $M_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ $\left(tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \in \mathbb{K}\right)$

Reste à montrer que tr est linéaire sur l'espace $M_n(\mathbb{K})$

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
M que $tr(\lambda A + B) = \lambda\, tr(A) + tr(B)$.

On a :
$tr(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda A + B)_{ii}$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda A_{ii} + B_{ii})$$

$(\lambda A + B)_{ij} =$
$\lambda \cdot A_{ij} + B_{ij}$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{ii}}_{= tr(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} B_{ii}}_{= tr(B)} \quad (\text{linéarité de } \sum)$$

$$= \lambda\, tr(A) + tr(B)$$ CQFD

1) b) $tr(AB) = tr(BA)$?

$$tr(AB) \underset{\text{par déf}}{=} \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii}$$

$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right)$$

$$\overset{!!}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik} \right)}_{=(BA)_{kk}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk}$$

$$= tr(BA)$$

Mq : $tr(AB) = tr\left(({}^tA)\cdot({}^tB)\right)$:

$$tr(AB) = tr\left({}^t(AB)\right)$$

$$= tr\left({}^tB \cdot {}^tA\right)$$

$$= tr\left({}^tA \cdot {}^tB\right)$$

1) c) Déterminons $\dim(\ker(tr))$:

On a tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$

et elle est non nulle, car $tr(I_n) = n \neq 0$

D'où son noyau $\ker(tr)$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \dim(\ker(tr)) = \dim(M_n(\mathbb{R})) - 1$$

$$\Rightarrow \dim(\ker(tr)) = n^2 - 1$$

Rappel :

En dim finie n, si H hyperplan de E alors

$\dim(H) = n-1$

1)d) Mq que : $E = \ker(tr) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$

(*) tr forme linéaire non nulle $\Rightarrow \ker(tr)$ hyperplan

(*)(*) $tr(I_n) \neq 0 \Rightarrow I_n \notin \ker(tr)$

D'où $E = \ker(tr) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.

1)e) Mq que $\ker(tr)$ Contient au moins une matrice inversible :

Rappel : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ inversible $\Leftrightarrow (\forall i, \lambda_i \neq 0)$

$D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1-n \end{pmatrix}$ inversible car les Coefficients diagonaux sont tous non nuls.

et $D \in \ker(tr)$; càd $tr(D) = 0$

$\blacksquare$

2. Soit φ l'application qui, à toute matrice M de E associe $\varphi(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$.

(a) Montrer que φ est un automorphisme de E.

(b) i. Déterminer $E_1(\varphi) = \{M \in E;\ \varphi(M) = M\}$.

ii. Montrer que $E_{n+1}(\varphi) = \{M \in E;\ \varphi(M) = (n+1)M\} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

2)a) • $\varphi \in \mathcal{L}(E)$?

Soient $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M+N) &= (\lambda M+N) + tr(\lambda M+N).I_n\\ &= \lambda M+N+ \lambda Tr(M)I_n+Tr(N).I_n\\ &= \lambda(M+tr(M)) + (N+Tr(N).I_n)\\ &= \lambda\varphi(M)+\varphi(N)\end{aligned}$$

• E étant de dimension finie, alors il suffit de montrer que φ est injectif.

Soit $M \in E$. Supposons que $\varphi(M)=0$ et Mq que $M=0$

$$\begin{aligned}\varphi(M)=0 &\Rightarrow M+Tr(M).I_n=0\\ &\Rightarrow Tr(M)+Tr(M).n=0 \quad \begin{pmatrix}Tr \text{ linéaire}\\ \text{et } Tr(I_n)=n\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow (n+1)Tr(M)=0\\ &\Rightarrow Tr(M)=0 \quad (n+1\neq 0)\end{aligned}$$

Ainsi, $M+Tr(M).I_n=0 \Rightarrow \underline{M=0}$ ☒

2)b)i) Soit $M \in E$. On a :

$$\begin{aligned}M \in E_1(\varphi) &\Leftrightarrow \varphi(M)=M\\ &\Leftrightarrow M+Tr(M).I_n=M\\ &\Leftrightarrow Tr(M)=0.\\ &\Leftrightarrow M \in \ker(Tr).\end{aligned}$$

$$E_1(\varphi)=\ker(Tr)$$

ii. Montrer que $E_{n+1}(\varphi) = \{M \in E;\ \varphi(M) = (n+1)M\} = \mathrm{Vect}(I_n)$.

Soit $M \in E$. On a :

$$
\begin{aligned}
M \in E_{n+1}(\varphi) &\iff \varphi(M) = (n+1)M \\
&\iff M + Tr(M).I_n = M + nM \\
&\iff Tr(M).I_n = nM \\
&\iff M = \frac{Tr(M)}{n}.I_n \\
&\implies M \in \mathrm{Vect}(I_n).
\end{aligned}
$$

D'où $E_{n+1}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(I_n)$

Réciproquement :

M que $\mathrm{Vect}(I_n) \subset E_{n+1}(\varphi)$.

Il suffit de vérifier que $I_n \in E_{n+1}(\varphi)$:

Et on a : $\varphi(I_n) = I_n + \underbrace{Tr(I_n)}_{=n}.I_n = (n+1)I_n$

D'où $I_n \in E_{n+1}(\varphi)$.

Enfin $E_{n+1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(I_n)$

3) Mq que $\psi^2 - 2\psi + id_E = 0$.

Soit $M \in E$. Mq que $\psi^2(M) - 2\psi(M) + M = 0$.

$$\psi^2(M) = \psi(M + Tr(M).J)$$
$$= \psi(M) + Tr(M).\psi(J)$$
$$= \psi(M) + Tr(M)(J + \underbrace{Tr(J)}_{=0}.J)$$
$$= \psi(M) + Tr(M).J$$

$$\psi^2(M) - 2\psi(M) + M = -\psi(M) + Tr(M).J + M$$
$$= -M - Tr(M).J + Tr(M).J + M$$
$$= 0 \quad \square$$

Partie II
Un premier résultat préliminaire

Soient F et G deux espaces vectoriels de dimensions respectivement finies $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit u une application linéaire de F vers G, de rang r tel que $r \in \mathbb{N}$. $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à m lignes et p colonnes.

1. Soit F_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans F, on considère l'application $v : F_1 \to \mathrm{Im}(u)$ telle que $x \longmapsto v(x) = u(x)$. Montrer que v est un isomorphisme.

On a $F = \ker(u) \oplus F_1$, $v : \begin{array}{l} F_1 \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \\ x \longmapsto v(x) = u(x) \end{array}$

* v linéaire :
Ça provient de la linéarité de u vu que :
$$\forall x \in F_1,\ v(x) = u(x).$$

** On a $\dim F_1 = \dim F - \dim(\ker(u))$
$= \dim(\mathrm{Im}(u))$ (thm du rang)

Alors il suffit de montrer que v est injective pour que v soit un isomorphisme.
Soit alors $x \in F_1$. Supposons que $v(x) = 0$.
Alors $\begin{cases} x \in F_1 \\ \text{et } u(x) = 0 \end{cases}$
$\Rightarrow x \in F_1 \cap \ker(u)$
$\Rightarrow x = 0$, car $F \cap \ker(u) = \{0\}$ $\square$

2. On suppose que $0 < r < \min(p, m)$ et on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, telle que $(e_1, \ldots, e_r)$ soit une base de F_1 et $(e_{r+1}, \ldots, e_p)$ une base de $\ker u$. On pose, pour tout entier naturel $i \in [\![1, r]\!]$, $\varepsilon_i = v(e_i)$.
   (a) Montrer qu'il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m)$ de vecteurs de G, telle que la famille $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ soit une base de G.
   (b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

2) a) $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) = (v(e_1), \ldots, v(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$
car v est un isomorphisme de F_1 vers $\mathrm{Im}(u)$.
$\Rightarrow (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ est une famille libre de G.
Et d'après le théorème de la base incomplète, il existe une famille $(\varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m)$ telle que $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r, \varepsilon_{r+1}, \ldots, \varepsilon_m)$ soit une base de G.

2) b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, la matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

$$\underset{B,\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}(u) = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_{r+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{array}\begin{array}{c} u(e_1) \cdots u(e_r) \mid u(e_{r+1}) \cdots u(e_p) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\underset{B,\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

3. En déduire que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, si $0 < r = \mathrm{rg}(M) < \min(m,p)$, alors il existe deux matrices inversibles S et T respectivement de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $M = SJ_{m,p,r}T^{-1}$ avec $J_{m,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et I_r la matrice identité de $\mathscr{M}_r(\mathbb{R})$.

Soit $M \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Supp que $0 < r = \mathrm{rg}(M) < \min(m,p)$

Soit $u \in \mathscr{L}(F,G)$ l'application linéaire canoniquement associée à M ; où $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^m$.

On a $\underset{B_F,B_G}{\mathrm{mat}}(u) = M$; où B_F et B_G les bases canoniques respectives de F et G.

D'après 2), il existe B base de F et $\mathscr{C}$ base de G

telles que : $\underset{B,\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = J_{m,p,r}$

D'autre part, on sait que :

$$\underset{B_F,B_G}{\mathrm{mat}}(u) = S \cdot \underset{B,\mathscr{C}}{\mathrm{mat}}(u) \cdot T^{-1}$$

où $S = P_{B_G,\mathscr{C}}$ et $T = P_{B_F,B}$.

$\Rightarrow$ $M = S\,J_{m,p,r}\,T^{-1}$ $\square$

4. Quelle est la forme de la matrice $J_{m,p,r}$, dans chaque cas suivant, ($0 < r = p < m$), ($0 < r = m < p$), ($0 < r = m = p$) ? Justifier la réponse.

4/ a/ Si $0 < r = p < m$

On a $$J_{m,p,r} = \begin{array}{c} \\ m \end{array} \overset{p}{\left(\begin{array}{c|c} I_r & \overset{p-r}{0} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)}$$

et $p = r$ donne :

$$J_{m,p,r} = \left(\begin{array}{c} I_r \\ \hline 0 \end{array} \right)$$

b) Si $0 < r = m < p$

On a $$J_{m,p,r} = \begin{array}{c} \\ m \end{array} \overset{p}{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)}$$

$m-r$

Avec $m = r$; càd $m - r = 0$, on a :

$$J_{m,p,r} = \left(I_r \mid 0 \right)$$

c/ Si $0 < r = m = p$

On a $$J_{m,p,r} = \begin{array}{c} \\ m \end{array} \overset{p}{\left(\begin{array}{c|c} I_r & \overset{p-r}{0} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)}$$

$m-r$

Avec $m = p = r$; $m - r = 0$ et $p - r = 0$

$$\Rightarrow \quad J_{m,p,r} = I_m$$

Partie III
Un deuxième résultat préliminaire

Soit L un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie s($s \in \mathbb{N}^*$). Notons $L^* = \mathscr{L}(L,\mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires de L. Soit $\mathscr{B} = (l_1, ..., l_s)$ une base de L. On note, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, l_i^* la forme linéaire sur L définie de la façon suivante, pour tout entier $j \in [\![1,s]\!]$, $l_i^*(l_j) = \delta_i^j$ où $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, le symbole de Kronecker.

1. Montrer que $\mathscr{B}^* = (l_1^*, ..., l_s^*)$ est une famille libre de L^*.
2. Soit $x \in L$ tel que $x = \sum_{i=1}^{s} x_i l_i$, montrer que, pour tout $j \in [\![1,s]\!]$, $l_j^*(x) = x_j$.
3. En déduire que $\mathscr{B}^*$ est une famille génératrice de L^*.
4. En déduire la dimension de L^*.

1) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i l_i^* = 0$.

M que : $(\forall j \in [\![1, S]\!], \lambda_j = 0)$

Soit alors $j \in [\![1, S]\!]$.

On a $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i l_i^*(l_j) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \delta_i^j = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_j \delta_j^j = 0 \quad (\text{car } \forall i \neq j, \delta_i^j = 0)$$

$$\Rightarrow \lambda_j = 0 \quad \square$$

2) Soit $x = \sum_{i=1}^{s} x_i l_i \in L$. Soit $j \in [\![1, S]\!]$. On a :

$$l_j^*(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i l_j^*(l_i) = \sum_{i=1}^{s} x_i \delta_i^j = x_j \delta_j^j = x_j$$

3) Soit $f \in L^*$. Montrons f s'écrit comme combinaison linéaire de $l_1^*, \dots, l_s^*$.

Soit $x \in L$. On a $x = \sum_{i=1}^{s} l_i^*(x) . l_i$ (d'après 2°)

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^{s} l_i^*(x) f(l_i) = \left(\sum_{i=1}^{s} f(l_i) l_i^*\right)(x)$$

D'où $f = \sum_{i=1}^{s} f(l_i) l_i^*$ $\square$

4) Étant libre et génératrice de L^*, B^* en est donc une base, et de cardinal s.

$$\Rightarrow \dim(L^*) = s$$

$$\dim(L^*) = \dim(L)$$

Partie IV

Une caractérisation d'une forme linéaire sur E

Soit A une matrice de E, on définit l'application ϕ_A de E vers $\mathbb{R}$, de la façon suivante, pour tout M de E, $\phi_A(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.

1. Vérifier que ϕ_A est une forme linéaire sur E.

2. Soit h l'application définie de E vers E^* par $A \to h(A) = \phi_A$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, une matrice élémentaire $E_{i,j} = (e_{k,l})_{1\le k,l\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme suit, pour tout couple d'entiers $(k,l) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, $e_{k,l} = \delta_k^i \delta_l^j$, (δ_k^i (resp. δ_l^j) est le symbole de Kronecker qui est défini dans la partie III).

(a) Vérifier que h est une application linéaire.

(b) i. On pose $A = (a_{k,l})_{1\le k,l\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, calculer $\phi_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de la matrice de A.

ii. En déduire que h est injective.

(c) En déduire que h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

1) Soient $M, M' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\phi_A(\lambda M + M') &= tr(A(\lambda M + M')) \\ &= tr(\lambda AM + AM') \\ &= \lambda tr(AM) + tr(AM') \\ &= \lambda \phi_A(M) + \phi_A(M')\end{aligned}$$

D'où $\phi_A \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

2) a) Soient $A, B \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mq que $h(\lambda A + B) = \lambda h(A) + h(B)$.

C-à-d que $\phi_{\lambda A+B} = \lambda \phi_A + \phi_B$.

Soit alors $M \in E$. On a :

$$\phi_{\lambda A+B}(M) = tr((\lambda A+B)M)$$
$$= tr(\lambda AM + BM)$$
$$= \lambda tr(AM) + tr(BM)$$
$$= \underline{(\lambda\phi_A + \phi_B)(M)} \quad \square$$

(b) i. On pose $A = (a_{k,l})_{1\leq k,l\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$, calculer $\phi_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de la matrice de A.

$$\phi_A(E_{ij}) = tr(AE_{ij})$$
$$= tr\left(\left(\sum_{k,l} a_{kl}E_{kl}\right)E_{ij}\right)$$
$$= tr\left(\sum_{k,l} a_{kl}\,\delta_l^i\,E_{kj}\right)$$
$$= \sum_{k,l} a_{kl}\,\delta_l^i\,tr(E_{kj})$$
$$= \sum_{k,l} a_{kl}\,\delta_l^i\,\delta_k^j \qquad \left(tr(E_{kj}) = \delta_k^j\right)$$
$$= \sum_k \left(\underbrace{\sum_l a_{kl}\,\delta_l^i\,\delta_k^j}_{=a_{ki}\,\delta_i^i\,\delta_k^j}\right)$$
$$= \sum_k a_{ki}\,\delta_k^j$$
$$= a_{ji}\,\delta_j^j$$
$$= \underline{a_{ji}} \quad \square$$

ii. En déduire que h est injective.

Soit $A \in E$. Supposons que $h(A) = 0$. Mq que $A = 0$

Notons $A = (a_{kl})_{1 \leq k,l \leq n}$.

On a : $h(A) = 0 \Rightarrow \phi_A = 0$

$\Rightarrow \forall i, j, \ \phi_A(E_{ij}) = 0$

$\Rightarrow \forall i, j, \ a_{ji} = 0$

$\Rightarrow A = 0$ $\square$

(c) En déduire que h est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On a $\begin{pmatrix} h \in \mathcal{L}(E, E^*) \\ \dim(E) = \dim(E^*) \\ h \text{ injective} \end{pmatrix}$

D'où h est un isomorphisme.

Partie V

Tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible

Soit H un hyperplan de E.

1. Montrer que pour toute matrice A non nulle de E qui n'appartient pas à H, on a $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.
2. Montrer qu'il existe une matrice B de E telle que $H = \ker(\phi_B)$.
3. On note $r = \text{rg}(B)$ et on considère la matrice de E, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que P_1 est une matrice inversible.

   (b) On suppose que $0 < r < n$ et on note $R_r = (r_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, avec $\begin{cases} r_{i,i} = 1 \text{ si } 1 \le i \le r \\ r_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Montrer que P_1 appartient à $\ker(\phi_{R_r})$.
4. En déduire que tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

1) Soit $A \in E \setminus \{0\}$ telle que $A \notin H$.

On a $\begin{cases} \dim \text{Vect}(A) = 1 \quad (\text{car } A \neq 0) \\ \dim H = \dim(E) - 1 \quad (\text{car } H \text{ hyperplan}) \end{cases}$

Alors pour m que $E = H \oplus \text{Vect}(A)$, il reste à montrer que $H \cap \text{Vect}(A) = \{0\}$.

Soit alors $M \in H \cap \text{Vect}(A)$.

$\Rightarrow \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, M = \lambda . A \\ M \in H \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda . A \in H$

Alors $\lambda = 0$, car sinon $\frac{1}{\lambda} . (\lambda A) = A \in H$
ce qui est faux.

Ainsi $M = \lambda . A \Rightarrow M = 0$

2. Montrer qu'il existe une matrice B de E telle que $H = \ker(\phi_B)$.

H hyperplan de E, donc il existe $\psi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker(\psi)$.

Or $h : E \to E^*$ est un isomorphisme et $\psi \in E^*$ alors il existe $B \in E$ tq $h(B) = \psi$.

Càd $\psi = \phi_B$.

Ainsi $(\exists B \in E,\ H = \ker(\phi_B))$

3. On note $r = \mathrm{rg}(B)$ et on considère la matrice de E, $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que P_1 est une matrice inversible.

P_1 est inversible car ses colonnes forment une base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$; ce sont les vecteurs de sa base canonique.

(b) On suppose que $0 < r < n$ et on note $R_r = (r_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$, avec $\begin{cases} r_{i,i} = 1 & \text{si } 1 \le i \le r \\ r_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que P_1 appartient à $\ker(\phi_{R_r})$.

$$R_r = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad (r)$$

$$P_1 \in \ker(\phi_{R_r}) \iff \phi_{R_r}(P_1) = 0.$$

Et on a :

$$\phi_{R_r}(P_1) = \phi_{R_r}(E_{21} + \dots + E_{n,n-1} + E_{1,n})$$

$$= \phi_{R_r}(E_{21}) + \dots + \phi_{R_r}(E_{n,n-1}) + \phi_{R_r}(E_{1,n})$$

<u>IV/2/b/i/</u> $\quad = \underbrace{(R_r)_{1,2}}_{=0} + \dots + \underbrace{(R_r)_{n-1,n}}_{=0} + \underbrace{(R_r)_{n,1}}_{=0}$

D'où $\phi_{R_r}(P_1) = 0$ $\square$

4. En déduire que tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

Soit H un hyperplan de E.

$$2) \Rightarrow \left(\exists B \in E,\ H = \ker(\phi_B)\right)$$

On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible.

Notons $r = rg(B)$.

Cas 1 : Si $0 < r < n$

$$3)b) \Rightarrow P_1 \in \ker(\phi_{R_r}) \text{ et } P_1 \text{ inversible.}$$

$$\text{II}) 3°) \Rightarrow \exists S, T \in GL_n(\mathbb{R}),\ B = S\, J_{n,n,r}\, T^{-1}$$

$$\Rightarrow B = S R_r T^{-1} \quad (\text{car } J_{n,n,r} = R_r)$$

On a :

$$P_1 \in \ker(\phi_{R_r}) \Leftrightarrow \phi_{R_r}(P_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow tr(R_r P_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow tr(S^{-1} B T P_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow tr(B T P_1 S^{-1}) = 0 \quad (\text{car } tr(MN) = tr(NM))$$

$$\Leftrightarrow \phi_B(T P_1 S^{-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow T P_1 S^{-1} \in \ker(\phi_B) = H$$

Et donc H contient $T P_1 S^{-1}$ qui est inversible.

Cas 2 : $r = 0$: Ce cas n'est pas possible, car on aura $B = 0$, et donc $\phi_B = \phi_0 = 0$

$$\Rightarrow H = \ker(\phi_B) = E \text{ ; absurde.}$$

Cas 3 : $r = n$

Donc $[B$ inversible et $H = \ker(\phi_B)]$

On veut montrer qu'il existe une matrice inversible Q telle que $Q \in \ker(\phi_B)$; càd $tr(BQ) = 0$.

I) 1) e) $\Rightarrow (\exists P \in GL_n(\mathbb{R}),\ tr(P) = 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} tr(B(B^{-1}P)) = 0 \\ \text{et } B^{-1}P \text{ inversible} \end{cases}$$

D'où la conclusion.

Fin