Durée : 4 heures

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Remarques générales:
L'épreuve se compose de quatre exercices indépendants.

★ ★ ★ ★ ★

EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 1
Puissances de la matrice A

1. a) Vérifier que $PQ = I$.
   b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer P^{-1} sa matrice inverse.
   c) Vérifier que $AP = PD$.
   d) En déduire que A est une matrice diagonalisable.

2. Soient les vecteurs suivants $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que u, v et w sont des vecteurs propres de la matrice A dont on précisera pour chacun sa valeur propre correspondante.

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.
   c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n, sous forme d'un tableau.

4. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ sont des suites réelles.
   On définit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^nU_0$.
   b) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n , b_n et c_n en fonction de n. (On utilisera l'expression de A^n obtenue dans la Partie 1, question 3. c)).

c) En utilisant le fait que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, recopier et compléter le programme Scilab suivant afin qu'il affiche U_n, l'entier n étant donné par l'utilisateur.

```
n=input(..........................................)
A=..........................................
U=..........................................
for i = ....................................
    U=..........................................
end
disp(....................)
```

Partie 2
Résolution de l'équation $M^3 = A$

On propose dans cette partie de résoudre l'équation suivante (E) : $M^3 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels quelconque, on pose $N = P^{-1}MP$.

1. Montrer que $M^3 = A$ si, et seulement si, $N^3 = D$.
2. Montrer que, si $N^3 = D$ alors $ND = DN$.
3. En déduire que, si $N^3 = D$, alors N est une matrice diagonale.
4. Déterminer la matrice diagonale N telle que $N^3 = D$.
5. En déduire la solution de l'équation matricielle (E).

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que, $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

1. a) Calculer, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\int_1^x e^{-(t-1)}dt$.
   b) En déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}dt$.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
   Dans toute la suite, on note X la variable aléatoire admettant f comme densité.
3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{-(x-1)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.
4. Déterminer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.(On pourra utiliser une integration par parties)
5. a) Montrer que $E(X^2) = 1 + 2E(X)$, avec $E(X^2)$ l'espérance de la variable aléatoire X^2.
   b) En déduire la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.
6. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - 1$.
   a) Déterminer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.
   b) Déterminer la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.
   c) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.
7. On considère, pour tout entier naturel non nul n, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que, $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$.
   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, f_n est une densité de probabilité.
   Dans toute la suite, on note pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire admettant f_n comme densité, et pour tout entier naturel non nul n, on note Y_n la variable aléatoire définie par $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$.

b) i) Déterminer la fonction de répartition F_{X_n} de X_n.
   ii) En déduire la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n.

c) Déterminer pour tout entier naturel non nul n, l'espérance $E(X_n)$ de X_n.

d) En déduire pour tout entier naturel non nul n, l'espérance $E(Y_n)$ de Y_n.

e) Déterminer pour tout entier naturel non nul n, $P(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n})$.

f) Écrire un programme en python qui détermine et affiche le plus petit entier naturel non nul n, tel que $P(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}) \leq 10^{-5}$.

EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique classique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'avoir Face est égale deux fois la probabilité d'avoir Pile. On lance le dé une seule fois et on observe son résultat.
Si le résultat du dé est 1, on lance la pièce une seule fois, sinon, on lance la pièce deux fois indépendamment.
On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de Faces apparues.

1. a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera.
   b) Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

2. a) Montrer que $P_{(X=1)}(Y = 0) = \frac{1}{3}$.
   b) Montrer que pour $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{9}$.
   c) En déduire la valeur de $P(Y = 0)$.

3. Montrer que $P(Y = 2) = \frac{10}{27}$.

4. Déterminer la valeur de $P(Y = 1)$.

5. Déterminer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y.

6. a) Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi du couple (X, Y).
   b) Est ce que les deux variables X et Y sont indépendantes? justifier votre réponse.
   c) Calculer la covariance $\text{Cov}(X, Y)$ de X et Y.
   d) Déterminer le coefficient de corrélation $\rho(X, Y)$ entre les deux variables aléatoires X et Y.

EXERCICE 4

Une entreprise produit en grande quantité des crayons. Lors de la fabrication, le responsable de l'entreprise considère que certains crayons ne sont pas commercialisables car ils présentent des défauts. Cette entreprise dispose de deux machines de fabrications :
La machine M_1, lente, pour laquelle la probabilité qu'un crayon soit commercialisable est égale à 0,99.
La machine M_2, rapide, pour laquelle la probabilité qu'un crayon soit commercialisable est égale à 0,96.
À la fin d'une journée de fabrication, on prélève au hasard un crayon et on note les événements suivants :
C : "le crayon est commercialisable".
On note a la probabilité qu'un crayon provienne de M_1 et on note $P(C)$ la probabilité de l'événement C.

1. Montrer que $P(C) = 0,03a + 0,96$.

2. À la fin de la production, on constate que 97% des crayons sont commercialisables.
   Prouver que la probabilité pour que le crayon provienne de la machine M_2 est égale à deux fois la probabilité pour que le crayon provienne de la machine M_1.

3. On prélève, successivement, indépendamment et avec remise, dix crayons qui sont dans le stock de l'entreprise pour être commercialisés. Dans cette question, on prend $P(C) = 0,97$. On appelle X la variable aléatoire associée aux nombre de crayons commercialisables dans ce prélèvement. On donne $0,97^9 \simeq 0,760$.

   a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   b) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait, dans ce prélèvement, que des crayons commercialisables.

   c) Déterminer la probabilité pour qu'il y ait, dans ce prélèvement, au plus un crayon non commercialisables.

   d) Écrire un programme Scilab, en utilisant la fonction grand, qui simule la variable aléatoire X et qui renvoie une matrice à une ligne et n colonnes, n étant entré par l'utilisateur.

4. Le responsable de l'entreprise décide d'augmenter le nombre des crayons commercialisables pour qu'il atteigne $0,99$ en achetant une nouvelle machine M_3. On note b la probabilité qu'un crayon provienne de la machine M_3, b est un nombre réel tel que $0 < b < 1$.

   a) Déterminer, $P_{M_3}(C)$ la probabilité qu'un crayon soit commercialisable sachant qu'il provient de M_3, en fonction de a et b.

   b) Montrer que $P_{M_3}(C) \geq 0,999$ si, et seulement si, $0 < a + \frac{13}{10}b \leq 1$.

   c) On suppose dans cette question que $P_{M_3}(C) = 0,999$. On note Y la variable aléatoire qui est égale au nombre des tirages nécessaires, seulement parmi les crayons provenant de M_3, pour obtenir le premier crayon non commercialisable. On suppose que tous les tirages sont indépendants.

      i) Vérifier que Y suit la loi géométrique de paramètre p à préciser.

      ii) Déterminer pour tout entier naturel non nul k, $P(Y = k)$.

      iii) Déterminer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

      iv) Écrire un programme Scilab, en utilisant la fonction grand, qui simule la variable aléatoire Y et qui renvoie une matrice à m lignes et une colonne, m étant entré par l'utilisateur.

FIN DE L'ÉPREUVE

★ ★ ★ ★ ★

Solution

EXERCICE 1

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 1
Puissances de la matrice A

1. a) Vérifier que $PQ = I$.

Facile, juste faites vos calculs.

b) En déduire que P est une matrice inversible et calculer P^{-1} sa matrice inverse.

On a $PQ = I$

D'où P est matrice inversible et qu'on a $P^{-1} = Q$.

c) Vérifier que $AP = PD$.

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'où $AP = PD$

d) En déduire que A est une matrice diagonalisable.

On a $AP = PD$

Donc $A = PDP^{-1}$.

En plus $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale.

D'où A est une matrice diagonalisable.

2. Soient les vecteurs suivants $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que u, v et w sont des vecteurs propres de la matrice A dont on précisera pour chacun sa valeur propre correspondante.

i) Montrons que u est un vecteur propre de la matrice A, et précisons sa valeur propre :

On a $AU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AU = (-1) \cdot U$

D'où U est un vecteur propre de la matrice A, et (-1) est

sa valeur propre.

ii) Montrons que v est un vecteur propre de la matrice A, et précisons sa valeur propre :

On a $Av = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vartheta$$

$$A\vartheta = 1.\vartheta$$

D'où ϑ est un vecteur propre de la matrice A, et 1 est sa valeur propre.

iii) Montrons que w est un vecteur propre de la matrice A, et précisons sa valeur propre :

On a $$Aw = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Aw = 2.w$$

D'où w est un vecteur propre de la matrice A, et 2 est sa valeur propre.

3. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation

Pour $n=0$.

$A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = I$

D'où $A^0 = PD^0P^{-1}$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$

On a :

$$A^{n+1} = A.A^n$$

$$= PDP^{-1} . PD^nP^{-1}$$

$$= PD . D^n P^{-1} \quad \text{car } P^{-1}P = I$$

$$A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Enfin on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}}$

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, D^n en fonction de n.

$$D^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \quad \text{car c'est une matrice diagonale.}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n, sous forme d'un tableau.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$A^n = P D^n P^{-1}$ (d'après 3)a))

$= P D^n Q$ (d'après 1) b))

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n & 1 & 0 \\ (-1)^n & 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}}$$

4. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ sont des suites réelles.

On définit la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ de la façon suivante, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ et $U_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

Initialisation

Pour $n = 0$.

On a $A^0 U_0 = I U_0 = U_0$

D'où $U_0 = A^0 U_0$

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $U_n = A^n U_0$ et montrons que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.

On a :

$$U_{n+1} = A U_n$$

$$= A \cdot A^n U_0$$

$$U_{n+1} = A^{n+1} U_0$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0}$

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n , b_n et c_n en fonction de n. (On utilisera l'expression de A^n obtenue dans la Partie 1, question 3. c)).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $U_n = A^n U_0$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 & 0 \\ (-1)^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$, d'après 3) c).

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^n \\ 2 - (-1)^n \\ 2 - (-1)^n \end{pmatrix}$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n = -(-1)^n \\ b_n = 2 - (-1)^n \\ c_n = 2 - (-1)^n \end{cases}}$

Partie 2
Résolution de l'équation $M^3 = A$

On propose dans cette partie de résoudre l'équation suivante (E) : $M^3 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois à coefficients réels quelconque, on pose $N = P^{-1}MP$.

1. Montrer que $M^3 = A$ si, et seulement si, $N^3 = D$.

On a $N = P^{-1}MP$

Alors $M = PNP^{-1}$.

Ainsi, on a :

$$M^3 = A \iff (PNP^{-1})^3 = PDP^{-1} \quad (\text{car } A = PDP^{-1})$$
$$\iff PN^3P^{-1} = PDP^{-1}$$
$$\iff N^3 = D$$

2. Montrer que, si $N^3 = D$ alors $ND = DN$.

Supposons que $N^3 = D$.

Montrons que $ND = DN$.

On a $ND = N.N^3$ $(\text{car } D = N^3)$
$= N^4$

Et on a $DN = N^3.N$ $(\text{car } D = N^3)$
$= N^4$

D'où $\boxed{ND = DN}$

3. En déduire que, si $N^3 = D$, alors N est une matrice diagonale.

Supposons que $N^3 = D$, et montrons que N est une matrice diagonale.

Notons $N = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

On a $N^3 = D$, alors d'après 2), $ND = DN$.

Donc :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a & a' & 2a'' \\ -b & b' & 2b'' \\ -c & c' & 2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -a' & -a'' \\ b & b' & b'' \\ 2c & 2c' & 2c'' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = -a' \\ 2a'' = -a'' \\ 2b'' = b'' \\ -b = b \\ -c = 2c \\ c' = 2c' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ a'' = 0 \\ b'' = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ c' = 0 \end{cases}$$

Alors $N = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ devient $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$

Par suite N est une matrice diagonale.

4. Déterminer la matrice diagonale N telle que $N^3 = D$.

Soit $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

On a :

$$N^3 = D \iff \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a^3 = -1 \\ b^3 = 1 \\ c^3 = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

On a :

$$\boxed{N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{N^3 = D \iff N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}}$$

5. En déduire la solution de l'équation matricielle (E).

On veut déduire de ce qui précède la matrice M vérifiant $M^3 = A$, où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Supposons que $M^3 = A$.

Alors $N^3 = D$, où $N = P^{-1}MP$

D'après 3°), N est une matrice diagonale.

Ainsi, N est une matrice diagonale vérifiant $N^3 = D$.

Alors d'après 4°), on a : $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$

On $N = P^{-1}MP$

Alors $M = PNP^{-1}$

$= PNQ$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } M^3 = A \text{ alors } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\rightsquigarrow$ Reste à vérifier la réciproque, càd :

$$\boxed{\text{Si } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors } M^3 = A}$$

Supposons $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifions que $M^3 = A$.

On a :

$$M^3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^3$$

$$= \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} P^{-1} \right)^3$$

$$= P. \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix}^3 . P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} (-1)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt[3]{2})^3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P D P^{-1}$$

$= A$ (car $A = PDP^{-1}$ d'après 1)c) de Partie 1)

D'où $M^3 = A$.

Enfin, la matrice M vérifiant $M^3 = A$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez, si vous voulez, faire le produit et trouver :

$$M = \begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}$$

Fin Exercice 1

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que, $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$.

1. a) Calculer, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, $\int_1^x e^{-(t-1)}dt$.

Soit $x \geqslant 1$.

$$\int_1^x e^{-(t-1)}\,dt = -\int_0^x \left(-(t-1)\right)' . e^{-(t-1)}\,dt$$

Rappel

Une primitive de $U'e^U$ est e^U

$$= -\left[e^{-(t-1)}\right]_0^x$$

$$= -\left(e^{-(x-1)} - 1\right)$$

D'où $$\boxed{\forall x \geqslant 1 \quad , \int_1^x e^{-(t-1)}\,dt = 1 - e^{-(x-1)}}$$

b) En déduire la valeur de $\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}dt$.

$$\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}\,dt \overset{\text{par définition}}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(\int_1^x e^{-(t-1)}\,dt\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-(x-1)}\right)$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}\,dt = 1 \quad , \text{car } \lim_{x \to +\infty} e^{-(x-1)} = 0$$

2. Montrer que f est une densité de probabilité.

On a : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

i) On a : $\left(\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)\geqslant 0\right)$

ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt$

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ e^{-(t-1)} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{+\infty} e^{-(t-1)}\,dt$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, d'après 1) b).

De i), ii) et iii) on tire que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on note X la variable aléatoire admettant f comme densité.

3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par : $F_X(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1-e^{-(x-1)} & \text{si } x\geq 1\end{cases}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

On sait que $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

<u>Si $x<1$</u>

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ e^{-(t-1)} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt$, car $\forall t\in\,]-\infty,x]$, on a $t<1$ et donc $f(t)=0$

$= 0$

<u>Si $x\geqslant 1$</u>

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt}_{=0} + \int_{1}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \int_1^x f(t)\,dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$= \int_1^x e^{-(t-1)}\,dt \quad \text{car } \forall t \in [1,x],\ f(t) = e^{-(t-1)}$$

$$= 1 - e^{-(x-1)} \quad (\text{d'après } 1)a))$$

4. Déterminer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.(On pourra utiliser une integration par parties)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt$$

par définition

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} t f(t)\,dt}_{=0} + \int_1^{+\infty} t f(t)\,dt$$

car $\forall t < 1,\ f(t) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$= \int_1^{+\infty} t\, e^{-(t-1)}\,dt \quad \left(\forall t \geq 1,\ f(t) = e^{-(t-1)}\right)$$

$$= \int_1^{+\infty} t \cdot \left(-e^{-(t-1)}\right)'\,dt$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

Rappel

$$= \left[-t \cdot e^{-(t-1)}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} t' \cdot \left(-e^{-(t-1)}\right)\,dt \quad (\text{intégr par parties})$$

$$= \underbrace{-\lim_{t \to +\infty} t\, e^{-(t-1)}}_{=0\text{, par croissance comparée}} + 1 + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-(t-1)}\,dt}_{=1\text{, d'après } 1)b)}$$

$$= 2$$

D'où $\boxed{E(X) = 2}$

5. a) Montrer que $E(X^2) = 1 + 2E(X)$, avec $E(X^2)$ l'espérance de la variable aléatoire X^2.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{1} t^2 f(t)\,dt}_{=0} + \int_{1}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ e^{-(t-1)} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

$$= \int_{1}^{+\infty} t^2 e^{-(t-1)}\,dt \text{ , car } \forall t \geq 1,\ f(t) = e^{-(t-1)}$$

$$= \int_{1}^{+\infty} t^2 . \left(-e^{-(t-1)}\right)' dt$$

$$= \left[-t^2 e^{-(t-1)}\right]_1^{+\infty} - \int_{1}^{+\infty} (t^2)' . \left(-e^{-(t-1)}\right) dt$$

intégration par parties

$$= \underbrace{-\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-(t-1)}}_{=0 \text{, par croissance comparée}} + 1 + 2\int_{1}^{+\infty} t\, e^{-(t-1)}\,dt$$

$$= 1 + 2\int_{1}^{+\infty} t f(t)\,dt \quad \left(\text{car } \forall t \geq 1,\ f(t) = e^{-(t-1)}\right)$$

$$= 1 + 2\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt \quad \left(\text{car } \forall t < 1,\ f(t) = 0\right)$$

$$= 1 + 2E(X)$$

D'où $\boxed{E(X^2) = 1 + 2E(X)}$

b) En déduire la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= 1 + 2E(X) - (E(X))^2 \quad (\text{d'après } 5)a))$$

Et avec $E(X) = 2$, on tire que :

$$\boxed{V(X) = 1}$$

6. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = X - 1$.

a) Déterminer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

On a $Y = X - 1$

$$E(Y) = E(X-1)$$

$$= \underbrace{E(X)}_{=2} - 1$$

$$= 1$$

Rappel

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$\boxed{E(Y) = 1}$$

b) Déterminer la variance $V(Y)$ de la variable aléatoire Y.

$$V(Y) = V(X-1)$$

$$= 1^2 \cdot V(X)$$

$$= V(X)$$

$$= 1$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Rappel

$$\boxed{V(Y) = 1}$$

c) Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_Y(x) = ?$

On a :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x)$$

$$= P(X - 1 \leq x) \quad (\text{car } Y = X - 1)$$

$$= P(X \leq 1 + x)$$

$$= F_X(1 + x)$$

On sait que : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - e^{-(x-1)} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} F_X(1+x) = 0 \text{ si } 1+x < 1 \\ F_X(1+x) = 1 - e^{-((1+x)-1)} \text{ si } 1+x \geq 1 \end{cases}$

Càd $\boxed{\begin{array}{l} F_Y(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F_Y(x) = 1 - e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{array}}$

7. On considère, pour tout entier naturel non nul n, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que,
$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t - \frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, f_n est une densité de probabilité.

On a : $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

i) On a : $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ f_n(t) \geqslant 0\right)$

ii) f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $\frac{1}{n}$.

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} f_n(t)\,dt$

$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} 0\,dt + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} e^{-(t-\frac{1}{n})}\,dt$$

$$= \left[-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty}$$

$$= \underbrace{-\lim_{t\to+\infty} e^{-(t-\frac{1}{n})}}_{=0} + 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$$

De i), ii) et iii) on tire que f_n est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on note pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire admettant f_n comme densité, et pour tout entier naturel non nul n, on note Y_n la variable aléatoire définie par $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$.

b) i) Déterminer la fonction de répartition F_{X_n} de X_n.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$, car f_n est une densité de probabilité de X_n.

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

Si $x < \frac{1}{n}$

$$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 0\,dt \text{ , car } \forall t \leq x \text{, on a } t < \tfrac{1}{n} \text{ et donc } f_n(t) = 0$$

$$= 0$$

Si $x \geq \frac{1}{n}$

$$F_{X_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} f_n(t)\,dt}_{= 0 \text{, car } (\forall t < \frac{1}{n},\ f_n(t) = 0)} + \int_{\frac{1}{n}}^{x} f_n(t)\,dt$$

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{x} e^{-(t-\frac{1}{n})}\,dt \quad \left(\text{car } \forall t \geq \tfrac{1}{n},\ f_n(t) = e^{-(t-\frac{1}{n})}\right)$$

$$= \left[-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^{x} \quad \left(\text{car } \left(-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right)' = e^{-(t-\frac{1}{n})}\right)$$

$$= -e^{-(x-\frac{1}{n})} + 1$$

Enfin :

$$\boxed{F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 - e^{-(x-\frac{1}{n})} & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}}$$

ii) En déduire la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n.

On a : $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leq x)$$
$$= P\left(X_n - \frac{1}{n} \leq x\right)$$
$$= P\left(X_n \leq \frac{1}{n} + x\right)$$
$$= F_{X_n}\left(\frac{1}{n} + x\right)$$

On sait que : $F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{n} \\ 1 - e^{-(x - \frac{1}{n})} & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} F_{X_n}\left(\frac{1}{n} + x\right) = 0 & \text{si } \frac{1}{n} + x < \frac{1}{n} \\ F_{X_n}\left(\frac{1}{n} + x\right) = 1 - e^{-\left(\left(\frac{1}{n} + x\right) - \frac{1}{n}\right)} & \text{si } \frac{1}{n} + x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$

Càd : $\boxed{\begin{cases} F_{Y_n}(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$

c) Déterminer pour tout entier naturel non nul n, l'espérance $E(X_n)$ de X_n.

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, dt$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\frac{1}{n}} t f_n(t)\,dt}_{=0,\ \text{car } \forall t<\frac{1}{n},\ f_n(t)=0} + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} t f_n(t)\,dt$$

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} t\, e^{-(t-\frac{1}{n})}\,dt \quad \left(\text{car } \forall t \geq \tfrac{1}{n},\ f_n(t) = e^{-(t-\frac{1}{n})}\right)$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} t . \left(-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right)'\,dt$$

intégration par parties

$$= \left[-t\, e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty} - \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} t' . \left(-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right) dt$$

$$= \underbrace{-\lim_{t\to+\infty} t\, e^{-(t-\frac{1}{n})}}_{=0,\ \text{par croissance comparée}} + \frac{1}{n} + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} e^{-(t-\frac{1}{n})}\,dt$$

$$= \frac{1}{n} + \left[-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{n} - \underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-(t-\frac{1}{n})}}_{=0} + 1$$

$$= 1 + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{E(X_n) = 1 + \frac{1}{n}}$$

d) En déduire pour tout entier naturel non nul n, l'espérance $E(Y_n)$ de Y_n.

On a $Y_n = X_n - \frac{1}{n}$

Alors :

$$E(Y_n) = E\left(X_n - \frac{1}{n}\right)$$
$$= E(X_n) - \frac{1}{n}$$
$$= 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$$
$$= 1$$

Rappel

$E(aX+b) = aE(X)+b$

$$\boxed{E(Y_n) = 1}$$

e) Déterminer pour tout entier naturel non nul n, $P(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n})$.

Soit $n \geq 1$. On a :

$$P\left(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}\right) = \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f_n(t)\, dt$$, car f_n est une densité de X_n.

$$= \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} e^{-(t-\frac{1}{n})}\, dt$$

(car $\forall \frac{2}{n} \leq t \leq \frac{3}{n}$, on a $t \geq \frac{1}{n}$, et donc $f_n(t) = e^{-(t-\frac{1}{n})}$)

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{n} \\ e^{-(t-\frac{1}{n})} & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$= \left[-e^{-(t-\frac{1}{n})}\right]_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}}$$

$$= -e^{-\frac{2}{n}} + e^{-\frac{1}{n}}$$

D'où : $\boxed{P\left(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}\right) = e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\frac{2}{n}}}$

f) Écrire un programme en python qui détermine et affiche le plus petit entier naturel non nul n, tel que $P(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}) \leq 10^{-5}$.

On veut déterminer le plus petit entier non nul n tel que :

$$P\left(\frac{2}{n} \leq X_n \leq \frac{3}{n}\right) \leq 10^{-5}$$

Càd tel que : $\boxed{e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\frac{2}{n}} \leq 10^{-5}}$

Alors on calculera les $e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\frac{2}{n}}$ à partir de $n=1$ jusqu'à ce que l'entier n vérifie : $\boxed{e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\frac{2}{n}} \leq 10^{-5}}$ et on stoppe.

Autrement dit, on calculera les $e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\frac{2}{n}}$ à partir de $n=1$ tant que $\boxed{e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\frac{2}{n}} > 10^{-5}}$.

C'est la boucle « while » qu'on utilisera.

D'où le programme suivant :

```
n=1
while (exp(-1/n)-exp(-2/n)) > 10**(-5) :
    n=n+1
print(n)
```

Voici le programme sur PC :

```
n=1
while (exp(-1/n)-exp(-2/n)) >10**(-5):
    n=n+1
print(n)
```

Et voici son exécution :

```
>>> (executing file "Ex2 2019 programme.py")
99999
```

Voici une vérification que pour $n=99999$, on a :

$$\boxed{e^{-\frac{1}{n}}-e^{-\frac{2}{n}} \leq 10^{-5}}$$

Mais pour $n=99998$, on a :

$$\boxed{e^{-\frac{1}{n}}-e^{-\frac{2}{n}} > 10^{-5}}$$

```
>>> n=99999

>>> exp(-1/n)-exp(-2/n)
9.999949999173197e-06

>>> n=99998

>>> exp(-1/n)-exp(-2/n)
1.000004999918147e-05

>>>

>>> exp(-1/n)-exp(-2/n)
1.000004999918147e-05
```

Fin Exercice 2

EXERCICE 3

On dispose d'un dé cubique classique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et d'une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'avoir Face est égale deux fois la probabilité d'avoir Pile. On lance le dé une seule fois et on observe son résultat.
Si le résultat du dé est 1, on lance la pièce une seule fois, sinon, on lance la pièce deux fois indépendamment.
On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de Faces apparues.

1. a) Justifier que X suit une loi uniforme que l'on précisera.

X est égale au résultat du dé.

Alors $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $(= [\![1, 6]\!])$.

Le dé est équilibré, alors :

$$\forall\ 1 \leqslant k \leqslant 6,\ P(X=k) = \frac{1}{6}$$

D'où $X \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

b) Déterminer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.

On a $X \sim \mathcal{U}([\![1, 6]\!])$.

Alors $E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$

Et $V(X) = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12}$

2. a) Montrer que $P_{(X=1)}(Y=0) = \frac{1}{3}$.

X = le résultat du dé.
Y = le nombre de Faces apparues (de la pièce lancée).

On a $\begin{cases} P(\text{Pile}) + P(\text{Face}) = 1 \\ P(\text{Face}) = 2 \times P(\text{Pile}) \end{cases}$

D'où $P(\text{Pile}) + 2 \cdot P(\text{Pile}) = 1$

Par suite $P(\text{Pile}) = \frac{1}{3}$ et $P(\text{Face}) = \frac{2}{3}$.

Montrons maintenant que $P_{(X=1)}(Y=0) = \frac{1}{3}$.

Si $(X=1)$, càd si le résultat du dé est égal à 1, alors on lance la pièce 1 seule fois.

$(Y=0)$ ça veut dire avoir 0 Faces.

Et donc $P_{(X=1)}(Y=0)$ est la probabilité d'avoir Pile quand on lance la pièce une seule fois.

D'où $\boxed{P_{(X=1)}(Y=0) = \frac{1}{3}}$

b) Montrer que pour $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $P_{(X=k)}(Y = 0) = \frac{1}{9}$.

Soit $k \in \{2,3,4,5,6\}$. Montrons que $P_{(X=k)}(Y=0) = \frac{1}{9}$.

Si l'on a $(X=k)$, alors on lance la pièce deux fois indépendamment.

Et donc $P_{(X=k)}(Y=0)$ est la probabilité d'avoir deux fois Pile lors de ces deux lancers.

Or la probabilité d'avoir Pile dans un lancer de la pièce est $\frac{1}{3}$.

Alors : $P_{(X=k)}(Y=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, Càd $\boxed{P_{(X=k)}(Y=0) = \frac{1}{9}}$

c) En déduire la valeur de $P(Y=0)$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(Y=0) = \underbrace{P_{(X=1)}(Y=0)}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{P(X=1)}_{=\frac{1}{6}} + \sum_{k=2}^{6} \underbrace{P_{(X=k)}(Y=0)}_{=\frac{1}{9}} \times \underbrace{P(X=k)}_{=\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{9} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} \times 5$$

Enfin $\boxed{P(Y=0) = \frac{4}{27}}$

3. Montrer que $P(Y=2) = \frac{10}{27}$.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(Y=2) = P_{(X=1)}(Y=2) \cdot \underbrace{P(X=1)}_{=\frac{1}{6}} + \sum_{k=2}^{6} P_{(X=k)}(Y=2) \times \underbrace{P(X=k)}_{=\frac{1}{6}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot P_{(X=1)}(Y=2) + \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=2}^{6} P_{(X=k)}(Y=2)$$

On rappelle que Y = le nombre de Faces apparues (de la pièce lancée).

$P_{(X=1)}(Y=2) = ?$

Si on a $(X=1)$, alors on lance la pièce une seule fois.

Alors $(Y=2)$, càd avoir 2 fois Face, est impossible.

D'où $P_{(X=1)}(Y=2)=0$.

$P_{(X=k)}(Y=2)=?$, où $k\in\{2,3,4,5,6\}$:

Si on a $(X=k)$, alors on lance la pièce deux fois.

Par suite $P_{(X=k)}(Y=2)$ est la probabilité d'avoir deux fois Face lors de ces deux lancers.

$$\boxed{\begin{array}{l} P(\text{Pile})=\frac{1}{3} \\ P(\text{Face})=\frac{2}{3}\end{array}}$$

Càd : $P_{(X=k)}(Y=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$

D'où $P_{(X=k)}(Y=2)=\frac{4}{9}$

Ainsi :

$$P(Y=2)=\frac{1}{6}\cdot\underbrace{P_{(X=1)}(Y=2)}_{=0}+\frac{1}{6}\cdot\sum_{k=2}^{6}\underbrace{P_{(X=k)}(Y=2)}_{=\frac{4}{9}}$$

$$=\frac{1}{6}\times\sum_{k=2}^{6}\frac{4}{9}$$

$$=\frac{1}{6}\times 5\times\frac{4}{9}$$

Enfin : $\boxed{P(Y=2)=\frac{10}{27}}$

4. Déterminer la valeur de $P(Y = 1)$.

On a : Y = le nombre de Faces apparues (de la pièce lancée).

Alors $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

D'où : $\underbrace{P(Y=0)}_{=\frac{4}{27}} + P(Y=1) + \underbrace{P(Y=2)}_{=\frac{10}{27}} = 1$

Enfin $\boxed{P(Y=1) = \frac{13}{27}}$

5. Déterminer l'espérance $E(Y)$ et la variance $V(Y)$ de Y.

i) $E(Y) = ?$

On a $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

D'où :

$$E(Y) = \underbrace{0 \cdot P(Y=0)}_{=0} + 1 \cdot \underbrace{P(Y=1)}_{=\frac{13}{27}} + 2 \cdot \underbrace{P(Y=2)}_{=\frac{10}{27}}$$

$$= \frac{13}{27} + \frac{20}{27} = \frac{33}{27}$$

Alors : $\boxed{E(Y) = \frac{11}{9}}$

ii) $V(Y) = ?$

$$V(Y) = E(Y^2) - \underbrace{(E(Y))^2}_{=\left(\frac{11}{9}\right)^2} = E(Y^2) - \left(\frac{11}{9}\right)^2$$

On a $Y(\Omega)=\{0,1,2\}$

Alors :

$$E(Y^2) = \underbrace{0^2\times P(Y=0)}_{=0} + 1^2\times \underbrace{P(Y=1)}_{=\frac{13}{27}} + 2^2\times \underbrace{P(Y=2)}_{=\frac{10}{27}}$$

$$= \frac{13}{27} + \frac{40}{27}$$

D'où $E(Y^2) = \dfrac{53}{27}$.

Par suite :

$$V(Y) = \frac{53}{27} - \left(\frac{11}{9}\right)^2$$

Enfin : $\boxed{V(Y) = \dfrac{38}{81}}$

6. a) Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi du couple (X, Y).

On a $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$ et $Y(\Omega)=\{0,1,2\}$

Alors on nous demande de déterminer les probabilités $P((X=i)\cap(Y=k))$

pour tout les $1\leqslant i\leqslant 6$ et $0\leqslant k\leqslant 2$.

Il s'agit de remplir le tableau suivant :

$X \backslash Y$	0	1	2
1	$P(X=1, Y=0)$	$P(X=1, Y=1)$	$P(X=1, Y=2)$
2	$P(X=2, Y=0)$	$P(X=2, Y=1)$	$P(X=2, Y=2)$
3	$P(X=3, Y=0)$	$P(X=3, Y=1)$	$P(X=3, Y=2)$
4	$P(X=4, Y=0)$	$P(X=4, Y=1)$	$P(X=4, Y=2)$
5	$P(X=5, Y=0)$	$P(X=5, Y=1)$	$P(X=5, Y=2)$
6	$P(X=6, Y=0)$	$P(X=6, Y=1)$	$P(X=6, Y=2)$

$$P(X=1, Y=0) = \underbrace{P_{(X=1)}(Y=0)}_{1/3} \times \underbrace{P(X=1)}_{1/6} = \frac{1}{18}$$

Soit $k \in \{2,3,4,5,6\}$. On a :

$$P(X=k, Y=0) = \underbrace{P_{(X=k)}(Y=0)}_{1/9} \times \underbrace{P(X=k)}_{1/6} = \frac{1}{54}$$

La 1ère colonne est remplie.

$$P(X=1, Y=2) = \underbrace{P_{(X=1)}(Y=2)}_{=0} \times \underbrace{P(X=1)}_{1/6} = 0$$

Soit $k \in \{2,3,4,5,6\}$. On a :

$$P(X=k, Y=2) = \underbrace{P_{(X=k)}(Y=2)}_{\frac{4}{9}} \times \underbrace{P(X=k)}_{1/6} = \frac{4}{54}$$

La $3^{ème}$ colonne est remplie.

On a :

$X \backslash Y$	0	1	2
1	$\frac{1}{18}$	$P(X=1, Y=1)$	0
2	$\frac{1}{54}$	$P(X=2, Y=1)$	$\frac{4}{54}$
3	$\frac{1}{54}$	$P(X=3, Y=1)$	$\frac{4}{54}$
4	$\frac{1}{54}$	$P(X=4, Y=1)$	$\frac{4}{54}$
5	$\frac{1}{54}$	$P(X=5, Y=1)$	$\frac{4}{54}$
6	$\frac{1}{54}$	$P(X=6, Y=1)$	$\frac{4}{54}$

Pour la $2^{ème}$ colonne :

On a $P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) = P(X=1) = \frac{1}{6}$

d'après la formule des probabilités totales.

De même, pour chaque ligne, la somme de ses éléments est égale à $\frac{1}{6}$.

Alors $\frac{1}{18} + P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6}$

Par suite $\boxed{P(X=1, Y=1) = \frac{1}{9}}$

Pour chaque $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, on a :

$\frac{1}{54} + P(X=k, Y=1) + \frac{4}{54} = \frac{1}{6}$

Donc $\boxed{P(X=k, Y=1) = \frac{4}{54}}$

Enfin on a le tableau :

X \ Y	0	1	2
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{4}{54}$
3	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{4}{54}$
4	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{4}{54}$
5	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{4}{54}$
6	$\frac{1}{54}$	$\frac{4}{54}$	$\frac{4}{54}$

b) Est ce que les deux variables X et Y sont indépendantes? justifier votre réponse.

X et Y ne sont pas indépendantes car $P(X=1, Y=0) \neq P(X=1) \times P(Y=0)$

puisque $\begin{cases} P(X=1, Y=0) = \frac{1}{18} \\ P(X=1) \times P(Y=0) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{27} = \frac{2}{81} \end{cases}$

c) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X, Y)$ de X et Y.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \underbrace{E(X)}_{\frac{7}{2}} \cdot \underbrace{E(Y)}_{\frac{11}{9}}$$

$$= E(XY) - \frac{77}{18}$$

$E(XY) = ?$

On a $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$$E(XY) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 6 \\ 0 \leq j \leq 2}} i\, j\, P(X=i, Y=j)$$

$$= 1 \times 0 \times P(X=1, Y=0) + 1 \times 1 \cdot P(X=1, Y=1) + 1 \cdot 2 P(X=1, Y=2) +$$

$$2 \cdot 0 \cdot P(X=2, Y=0) + 2 \cdot 1 \cdot P(X=2, Y=1) + 2 \cdot 2 P(X=2, Y=2) +$$

$$3 \cdot 0 \cdot P(X=3, Y=0) + 3 \cdot 1 \cdot P(X=3, Y=1) + 3 \cdot 2 \cdot P(X=3, Y=2) +$$

$$4 \cdot 0 \cdot P(X=4, Y=0) + 4 \cdot 1 \cdot P(X=4, Y=1) + 4 \cdot 2 \cdot P(X=4, Y=2) +$$

$$5 \cdot 0 \cdot P(X=5, Y=0) + 5 \cdot 1 \cdot P(X=5, Y=1) + 5 \cdot 2 \cdot P(X=5, Y=2) +$$

$$6 \cdot 0 \cdot P(X=6, Y=0) + 6 \cdot 1 \cdot P(X=6, Y=1) + 6 \cdot 2 \cdot P(X=6, Y=2) +$$

$$E(XY) = \frac{1}{9} + (2+3+4+5+6)\times\frac{4}{54} + (4+6+8+10+12)\times\frac{4}{54}$$

$$E(XY) = \frac{41}{9}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \frac{77}{18}$$

$$= \frac{41}{9} - \frac{77}{18}$$

Enfin : $\boxed{Cov(X,Y) = \frac{5}{18}}$

d) Déterminer le coefficient de corrélation $\rho(X,Y)$ entre les deux variables aléatoires X et Y.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{5}{18}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{12}}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{\frac{38}{81}}$$

$$\sigma(X)\,\sigma(Y) = \sqrt{\frac{35}{12}\times\frac{38}{81}} = \sqrt{\frac{665}{6}\times\frac{1}{9}}$$

$$\boxed{\rho(X,Y) = \frac{5}{2\sqrt{\frac{665}{6}}}}$$