

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Lundi 19 mai 2008 de 14H00 à 18H00

EXTRAIT

SECOND PROBLÈME

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

$$G(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

Partie A : Etudes de deux fonctions

1. (a). Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b). Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.
2. (a). Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées.
(b). Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.
3. (a). Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k .
(b). Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$?
4. (a). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer sans calcul qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.
(b). Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c). Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.
(d). En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).
(e). Etablir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k \in]a_k, a_k + \frac{\pi}{2}[$.
(f). Calculer $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k) .

5. Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_F$ de la fonction F lorsque l'abscisse x varie dans $[0, 4\pi]$. On se placera dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\| = 10\text{cm}$. On fera apparaître clairement les tangentes horizontales à la courbe et on précisera les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_F$ avec l'axe $(O, \vec{i})$.

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$. Si f appartient à E , on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t) \cos(xt) dt \qquad J_f(x) = \int_0^1 f(t) \sin(xt) dt$$

Soit f une fonction appartenant à E .

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis.
On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.
7. Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f .
8. On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- (a). Etablir que : $\forall x > 0, I_f(x) + iJ_f(x) = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix} \int_0^1 f'(t)e^{ixt} dt$.
- (b). Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0, 1]$.
On posera par la suite $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $M' = \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.
- (c). En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0, |I_f(x) + iJ_f(x)| \leq \frac{A}{x}$.
- (d). A l'aide de la question 8.(c), calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (I_f(x) + iJ_f(x))$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_f(x)$.
- (e). En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f , calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} I_f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} J_f(x)$.
9. L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.
- (a). Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
- (b). Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leq |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).
- (c). Soient x et y deux réels. Etablir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leq |x - y| \int_0^1 t|f(t)| dt$.
- (d). En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas demandé ici.
10. A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie A, et les fonctions I_f et J_f de la partie B.

FIN

