Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Quel est le degré de P_n ?

   (b) Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geqslant 2n+1$?

2. (a) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.

   (b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

3. Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.

   (a) Montrer que, pour tout réel x,

   $$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p}.$$

   (b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.

   (c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.