

Calculs de déterminants

Dans tout le problème a, b, c désignent des réels et n un entier supérieur à 1.

Partie I

Soit Δ_n le déterminant de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :

les éléments de la diagonale principale sont égaux à a , ceux au dessus de la cette diagonale valent b et enfin ceux en dessous de la diagonale valent c .

$$\text{Ainsi : } \Delta_1 = |a|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .
- 2.a Calculer Δ_n dans les cas $a = c$ et $a = b$.
- 2.b Calculer Δ_n dans le cas où $b = c$.
3. On suppose $b \neq c$ et $n \geq 3$.
- 3.a Etablir que $\Delta_n - (2a - b - c)\Delta_{n-1} + (a - b)(a - c)\Delta_{n-2} = 0$.
On pourra par exemple opérer avec les deux dernières colonnes puis faire la même manipulation sur les lignes.
- 3.b Donner l'expression du terme général de la suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$.

Partie II

Dans cette partie $a_1, \dots, a_n$ désignent n réels. On désire calculer le déterminant D_n de la matrice carrée d'ordre n formée de la manière suivante :

Les coefficients diagonaux sont les $a_1, \dots, a_n$, les coefficients au dessus de la diagonale sont égaux à b tandis que ceux en dessous de la diagonale valent c .

$$\text{Ainsi } D_1 = |a_1|, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{vmatrix} \text{ et } D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b & b \\ c & a_2 & b \\ c & c & a_3 \end{vmatrix}.$$

1. Dans un premier temps, nous supposons $b \neq c$.
On pose $D_n(x)$, le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à tous les coefficients de la matrice définissant D_n .

$$\text{Ainsi } D_n(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & b + x & \cdots & b + x \\ c + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b + x \\ c + x & \cdots & c + x & a_n + x \end{vmatrix}.$$

- 1.a Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction affine, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $D_n(x) = \alpha x + \beta$.
- 1.b Calculer α et β en évaluant $D_n(x)$ pour des valeurs judicieuses de x .
- 1.c En déduire l'expression de D_n .
2. On désire calculer D_n dans le cas où $b = c$.
- 2.a On fixe le paramètre c et on fait varier le paramètre b dans $\mathbb{R}$. Etablir que D_n apparaît alors comme une fonction continue de la variable b variant dans $\mathbb{R}$.
- 2.b En déduire la valeur de D_n dans le cas où $b = c$.

Correction

Partie I

1. $\Delta_1 = a, \Delta_2 = a^2 - bc, \Delta_3 = a^3 + b^2c + bc^2 - 3abc.$

2.a Dans le cas $a = c$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1.$

donc en développant selon la première colonne $\Delta_n = a \begin{vmatrix} a-b & & (0) \\ & \ddots & \\ (a-b) & & a-b \end{vmatrix}_{[n-1]} = a(a-b)^{n-1}.$

En transposant, on obtient $\Delta_n = a(a-c)^{n-1}$ dans le cas $a = b.$

2.b $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ a+(n-1)b & b & & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & b & & a \end{vmatrix}.$

$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_1$ donne

$\Delta_n = (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$

2.b $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & b \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & (a-b) & & a-b \end{vmatrix}$ via $L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_n \leftarrow L_n - L_1.$

3.a Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ et $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ donne $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & & b & b & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix}.$

En développant selon la dernière colonne :

$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & 0 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ c & & a & b & 0 \\ c & \cdots & c & a & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & c-a & 2a-b-c \end{vmatrix} = -(b-a) \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c-a \end{vmatrix} + (2a-b-c) \begin{vmatrix} a & b & b \\ c & & a & b \\ c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$

puis $\Delta_n = -(b-a)(c-a)\Delta_{n-2} + (2a-b-c)\Delta_{n-1}$ et la relation demandée.

3.b La suite $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$r^2 - (2a-b-c)r + (a-b)(a-c) = 0.$ En reconnaissant somme et produit des racines, les solutions de cette équation caractéristique sont $a-b$ et $a-c$, elles sont distinctes car $b \neq c$ et donc le terme général de (Δ_n) est de la forme $\Delta_n = \lambda(a-b)^n + \mu(a-c)^n.$

Pour $n = 1$, on obtient $\lambda(a-b) + \mu(a-c) = a$ (1)

Pour $n = 2$, on obtient $\lambda(a-b)^2 + \mu(a-c)^2 = a^2 - bc$ (2)

$(a-c) \times (1) - (2)$ donne $\lambda(a-b)(b-c) = c(b-a)$ donc $\lambda = \frac{c}{c-b}$ et de même $\mu = \frac{b}{b-c}$ d'où

$\Delta_n = \frac{c(a-b)^n - b(a-c)^n}{c-b}.$

Partie II

- 1.a En retranchant la première colonne à toutes les autres colonnes, on fait disparaître les x des colonnes $C_2, \dots, C_n$. En développant alors le déterminant selon sa première colonne on obtient une somme de coefficients qui sont des fonctions affines de x multipliés par des cofacteurs qui eux ne dépendent pas de x . Ainsi $D_n(x)$ apparaît comme une fonction affine de x .

1.b Pour $x = -b$, $D_n(-b) = \prod_{i=1}^n (a_i - b) = \beta - \alpha b$.

Pour $x = -c$, $D_n(-c) = \prod_{i=1}^n (a_i - c) = \beta - \alpha c$.

On en déduit $\alpha = \frac{D_n(-b) - D_n(-c)}{c - b} = \frac{\prod_{i=1}^n (a_i - b) - \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b}$ et

$$\beta = D_n(-b) + \alpha b = \frac{c \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b}.$$

1.c $D_n = D_n(0) = \beta = \frac{c \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b}$.

- 2.a Notons $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice définissant D_n . En fixant c et en faisant b , on peut percevoir $m_{i,j}$ comme une fonction de b : $b \mapsto m_{i,j}(b)$. Cette fonction est continue car soit

$$m_{i,j}(b) = b, \text{ soit } m_{i,j}(b) \text{ ne dépend pas de } b. \text{ Puisque } D_n(b) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}(b), \text{ } b \mapsto D_n(b) \text{ est}$$

continue par opération sur les fonctions continue.

- 2.b Par continuité : $D_n(c) = \lim_{b \rightarrow c} D_n(b)$.

Or pour $b \neq c$: $D_n(b) = \frac{c \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b}$ donc $D_n(c) = \lim_{b \rightarrow c} \frac{c \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b}$.

$$\frac{c \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b} = \frac{(c - b + b) \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{c - b} = \prod_{i=1}^n (a_i - b) - b \frac{\prod_{i=1}^n (a_i - b) - \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{b - c}$$

Mais $\lim_{c \rightarrow b} \prod_{i=1}^n (a_i - b) = \prod_{i=1}^n (a_i - c)$ et $\lim_{b \rightarrow c} \frac{\prod_{i=1}^n (a_i - b) - \prod_{i=1}^n (a_i - c)}{b - c} = \frac{d}{db} \left(\prod_{i=1}^n (a_i - b) \right)_{b=c} = - \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_j - c)$.

Finalement, quand $b = c$: $D_n = \prod_{i=1}^n (a_i - c) + c \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (a_j - c)$.