Partie I

1) a) $tr(AB) = tr(BA)$ (très classique)

b) Aussi, classique

2) Supposons que l'on a :

$$f + \alpha g = g^{-1} \circ f \circ g$$

Alors $f\circ g^{-1} + \alpha I_E = g^{-1} \circ f$

$\Rightarrow tr(f\circ g^{-1} + \alpha I_E) = tr(g^{-1}\circ f)$

$\Rightarrow \underbrace{tr(f\circ g^{-1})}_{= tr(g^{-1}\circ f)} + \alpha \underbrace{tr(I_E)}_{=n} = tr(g^{-1}\circ f)$

$\Rightarrow \alpha n = 0$, càd $\alpha = 0$ (car $n \geq 1$)

ce qui est absurde

3) a) OK ; $(u^k(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{u(u^k(x))}_{=u^{k+1}(x)} = 0$

b) Supp. que $Ker(u^k) = Ker(u^{k+1})$.

M.q. ($\forall p \in \mathbb{N}$, $Ker(u^k) = Ker(u^{k+p})$)

Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour $p = 0$: (OK)

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$.

Supp. que $Ker(u^k) = Ker(u^{k+p})$.

M.q. $Ker(u^k) = Ker(u^{k+p+1})$:

(Par double inclusion)

i) $Ker(u^k) \subset Ker(u^{k+p+1})$?

$u^k(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{u^{p+1}(u^k(x))}_{=u^{k+p+1}(x)} = 0$

ii) $\boxed{u^{k+p+1}(x) = 0} \Rightarrow u^{k+1}(u^p(x)) = 0$

$\Rightarrow u^p(x) \in Ker(u^{k+1}) = Ker(u^k)$

$\Rightarrow u^p(x) \in Ker(u^k)$

$\Rightarrow u^{k+p}(x) = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(u^{k+p}) \xrightarrow{HR} Ker(u^k)$

$\Rightarrow x \in Ker(u^k)$

$\Rightarrow u^k(x) = 0$ CQFD

c) M.q. $(Ker(u^{k+1}) \neq Ker(u^{k+2})) \Rightarrow Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$

Par contraposée :

$Ker(u^k) = Ker(u^{k+1}) \overset{b)}{\Rightarrow} \forall p \in \mathbb{N}, Ker(u^k) = Ker(u^{k+p})$

$\Rightarrow Ker(u^k) = Ker(u^{k+2})$

or $Ker(u^k) = Ker(u^{k+1})$

alors $Ker(u^{k+1}) = Ker(u^{k+2})$

d) Démonstration par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: (Méth 1)

Initialisation : (Pour $k = 0$)

Supp. que $Ker(u^0) \neq Ker(u^1)$. M.q. $\dim(Ker u) \geq 1$

On a $Ker(u^0) = Ker(I_E) = \{0\} \subsetneq Ker(u)$

$\Rightarrow \dim Ker(u) > \dim\{0\} = 0$

$\Rightarrow \dim Ker(u) \geq 1$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$.

Supposons que (si $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$ alors $\dim Ker(u^{k+1}) \geq k+1$)

M.q. (si $Ker(u^{k+1}) \neq Ker(u^{k+2})$ alors $\dim Ker(u^{k+2}) \geq k+2$)

Supp $Ker(u^{k+1}) \neq Ker(u^{k+2})$

$\xrightarrow{c)} Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$

$\xrightarrow{HR} \dim(Ker(u^{k+1})) \geq k+1$

D'autre part, on a $Ker(u^{k+1}) \subsetneq Ker(u^{k+2})$

$\Rightarrow \dim(Ker(u^{k+2})) > \dim(Ker(u^{k+1})) \geq k+1$

$\Rightarrow \dim(Ker(u^{k+2})) > k+1$

$\Rightarrow \dim(Ker(u^{k+2})) \geq k+2$

Methode : (Démonstration directe)

Supp $Ker(u^k) \neq Ker(u^{k+1})$ alors

$Ker(u^{k+1}) \supsetneq Ker(u^k) \supsetneq \cdots \supsetneq Ker(u^0)$

$\Rightarrow \begin{cases} Ker(u^0) \subsetneq Ker(u) \\ Ker(u) \subsetneq Ker(u^2) \\ \vdots \\ Ker(u^k) \subsetneq Ker(u^{k+1}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(Ker(U^0)) < \dim(Ker(U)) \\ \dim(Ker(U)) < \dim Ker(U^2) \\ \quad \dots \\ \dim(Ker(U^k)) < \dim Ker(U^{k+1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dim(Ker(U^0)) + 1 \leq \dim Ker(U) \\ \dim(Ker\, U) + 1 \leq \dim Ker(U^2) \\ \quad \dots \\ \dim Ker(U^k) + 1 \leq \dim Ker(U^{k+1}) \end{cases}$$

Par sommation et simplifications, on aura:

$$\underbrace{\dim(Ker(U^0))}_{=\dim(\{0\})=0} + (k+1) \leq \dim(Ker(U^{k+1}))$$

$$\Rightarrow \dim(Ker(U^{k+1})) \geq k+1$$

e) i) $Ker(U^n) = Ker(U^{n+1})$; En effet:

Supp le contraire : $Ker(U^n) \neq Ker(U^{n+1})$

(d) $\Rightarrow \dim(Ker(U^{n+1})) \geq n+1 > \dim(E)$

Ce qui est absurde

ii) $E = Ker(U^n) \oplus Im(U^n)$; En effet:

(A) d'abord $\dim E = \dim Ker(U^n) + \dim(Im\, U^n)$ D'après le thm du rang.

(B) M.q $Ker(U^n) \cap Im(U^n) = \{0\}$:

Soit $y \in Ker(U^n) \cap Im(U^n)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} U^n(y) = 0 \\ \exists x \in E,\ y = U^n(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow U^{n+n}(x) = 0$

$\Rightarrow x \in Ker(U^{n+n}) \overset{b°/}{=\!=} Ker(U^n)$

$\Rightarrow \underbrace{U^n(x)}_{=y} = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ☐

Fin Partie (I)

Partie II

1) i) $rg(U) = rg \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

ii) $U(e_1)$ et $U(e_2)$ sont linéairement indépendants car $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ le sont.

or $\dim(Im(U)) = 2$ alors la famille $\boxed{(U(e_1), U(e_2)) \text{ est une base de } Im(U).}$

iii) $\dim Ker(U) = 1$ (thm du rang)

et $U(e_2) = U(e_3)$ donc $U(e_2 - e_3) = 0$

$\Rightarrow \boxed{(e_2 - e_3) \text{ base de } Ker(U)}$ ☐

N.B: Vous pouvez procéder comme suit: $x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(U) \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \dots$

2) $A^0 = I_3$

$A^1 = A$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = 0$;

$\forall k \geq 3,\ A^k = 0$

3) i) $e_1 = (1, 0, 0)$

$U(e_1) = (-1, 0, 1)$

$U^2(e_1) = (0, -1, 1)$

$$\det_{B_0}(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

D'où B base de E

ii)
$$mat_B(U) = \begin{array}{c|ccc} & U(e_1) & U(U(e_1)) & U(U^2(e_1)) \\ \hline e_1 & & & \\ U(e_1) & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \\ U^2(e_1) & & & \end{array}$$

4) a) $v(e_1) \in E$ et B base de E.

b) ($\Rightarrow$) Supp ($UV - VU = U$).

M.q $\underset{B}{mat}(V) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}$

$\boxed{V(e_1) = a_0 e_1 + a_1 U(e_1) + a_2 U^2(e_1)}$ (α)

$V(U(e_1)) = U(V(e_1)) - U(e_1)$ (car $UV - VU = U$)

$= U(a_0 e_1 + a_1 U(e_1) + a_2 U^2(e_1)) - U(e_1)$

$= a_0 U(e_1) + a_1 U^2(e_1) + a_2 \underbrace{U^3(e_1)}_{=0} - U(e_1)$

$\boxed{V(U(e_1)) = (a_0 - 1) U(e_1) + a_1 U^2(e_1)}$ (β)

$V(U^2(e_1)) = (VU)(U(e_1))$

$= (UV - U)(U(e_1))$

$= U(VU(e_1)) - U^2(e_1)$

$= U((a_0-1) U(e_1) + a_1 U^2(e_1)) - U^2(e_1)$

$= (a_0-1) U^2(e_1) + a_1 \underbrace{U^3(e_1)}_{=0} - U^2(e_1)$

$\Rightarrow \boxed{V(U^2(e_1)) = (a_0 - 2) U^2(e_1)}$ (γ)

De (α), (β) et (γ), on tire que :

$$\boxed{\underset{B}{mat}(V) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}}$$

($\Leftarrow$) Supp $\underset{B}{mat}(V) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$

et m.q ($UV - VU = U$)

Suffit de montrer que :

$\underset{B}{mat}(U) . \underset{B}{mat}(V) - \underset{B}{mat}(V) . \underset{B}{mat}(U) = \underset{B}{mat}(U)$

Et il suffit seulement de faire vos calculs ; $\underset{B}{mat}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$\underset{B}{mat}(V) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}$.

c) On a $\underset{B}{mat}(V_0) = diag(0, -1, -2)$

$\Rightarrow V_0(e_1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} V_0(e_1) = d_0 e_1 + d_1 U(e_1) + d_2 U^2(e_1) \\ \text{où } d_0 = d_1 = d_2 = 0 \end{cases}$

D'après 4)b), on a que (U, V_0) vérifie la propriété (P) si et ssi :

$\underset{B}{mat}(V_0) = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_0-1 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_0-2 \end{pmatrix}$

ce qui est vérifié, alors (U, V_0) vérifie (P)

d) (U, V) vérifie la propriété (P)

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(V) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0-1 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0-2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(V - V_0) = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(V - V_0) = \begin{pmatrix} a_0 & & \\ a_1 & a_0 & \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$

Et on a :

$\underset{B}{mat}(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\underset{B}{mat}(U^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D'où ;

(U, V) vérifie la propriété (P)

$\Leftrightarrow \underset{B}{mat}(V - V_0) = \underset{B}{mat}(a_0 Id + a_1 U + a_2 U^2)$

$\Leftrightarrow V - V_0 = a_0 Id + a_1 U + a_2 U^2$

$\Rightarrow V - V_0 \in Vect(Id, U, U^2)$.

Réciproquement :

Supp $V - V_0 \in Vect(Id, U, U^2)$ et

M.que $V - V_0 = a_0 Id + a_1 U + a_2 U^2$

3

On a $(v-v_0) \in \text{vect}(Id, u, u^2)$

$\Rightarrow (\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,/\, v-v_0 = \alpha Id + \beta u + \gamma u^2)$

$\Rightarrow v(e_1) - \underbrace{v_0(e_1)}_{=0} = \alpha e_1 + \beta u(e_1) + \gamma u^2(e_1)$

$\Rightarrow v(e_1) = \alpha e_1 + \beta u(e_1) + \gamma u^2(e_1)$

Or $v(e_1) = a_0 e_1 + a_1 u(e_1) + a_2 u^2(e_1)$

et que $(e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ base de E

alors $(a_0 = \alpha \,;\, a_1 = \beta \,;\, a_2 = \gamma)$.

D'où $\boxed{v - v_0 = a_0 Id + a_1 u + a_2 u^2}$

(Fin Partie II) CQFD

Partie III.

1) a) i) u non bijectif ; En effet :

Raisonnons par l'absurde, et supp que u bijectif.

On a $uv - vu = u$

$\Rightarrow uvu^{-1} - v = Id$

$\Rightarrow \underbrace{tr(uvu^{-1})}_{= tr(v)} - tr(v) = \underbrace{tr(Id)}_{=n}$

$\Rightarrow n = 0$; ce qui est absurde

ii) $tr(u) = tr(uv - vu) = \underbrace{tr(uv)}_{= tr(vu)} - tr(vu) = 0$.

b) Récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. (simple)

2) M. que : $(\forall k \in \{0, \dots, n\}, \dim \text{Ker}(u^k) = k)$

Par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$

Pour $k = 0$: OK

Hérédité : Soit $0 \leq k \leq n-1$.

Supp. que $\dim \text{Ker}(u^k) = k$

M. que $\dim \text{Ker}(u^{k+1}) = k+1$

$\text{Im}(u^k)$ stable par u.

Notons u_k l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u^k)$.

On a $\begin{cases} u_k \in \mathcal{L}(\text{Im}(u^k)) \\ \forall x \in \text{Im}(u^k),\ u_k(x) = u(x) \end{cases}$

D'après le thm du rang, on a :

$\dim(\text{Im}(u^k)) = \dim(\text{Im}(u_k)) + \dim \text{Ker}(u_k)$

Et on a :

$\dim(\text{Im}(u^k)) = n - \underbrace{\dim \text{Ker}(u^k)}_{=k}$ (thm rang)

HRécurrence $n - k$.

$\dim \text{Im}(u_k) = \dim(\text{Im}(u^{k+1}))$

$= n - \dim(\text{Ker}(u^{k+1}))$ (thm rang)

D'où $\dim \text{Ker}(u^{k+1}) = k + \dim \text{Ker}(u_k)$

D'autre part, on a :

$x \in \text{Ker}(u_k) \iff x \in \text{Im}(u^k)$ et $u_k(x) = 0$

$\iff x \in \text{Im}(u^k)$ et $u(x) = 0$

$\iff x \in \text{Im}(u^k)$ et $x \in \text{Ker}(u)$

D'où $\text{Ker}(u_k) = \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k)$

$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(u_k)) \leq \dim \text{Ker}(u) = 1$

Ainsi $\boxed{\dim \text{Ker}(u^{k+1}) \leq k+1}$ (α)

On a $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$

Montrons que l'inclusion est stricte.

Supposons le contraire, alors $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$

$\Rightarrow \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^n)$ (d'après Partie I; 3)b))

$\Rightarrow \underbrace{\dim \text{Ker}(u^k)}_{=k} = \dim E = n$ (car $u^n = 0$)

$\Rightarrow k = n$ (ce qui contredit le fait que $k \leq n-1$)

d'où $\text{Ker}(u^k) \subsetneq \text{Ker}(u^{k+1})$

$\Rightarrow \underbrace{\dim \mathrm{Ker}(U^k)}_{=k} < \dim \mathrm{Ker}(U^{k+1})$

$\Rightarrow k < \dim \mathrm{Ker}(U^{k+1})$

$\Rightarrow \boxed{k+1 \leqslant \dim \mathrm{Ker}(U^{k+1})}$ (β)

(α) et (β) $\Rightarrow \boxed{\dim \mathrm{Ker}(U^{k+1}) = k+1}$

(CQFD)

3°) i) $\dim \mathrm{Ker}(U^{n-1}) = n-1 \Rightarrow \mathrm{Ker}(U^{n-1}) \neq E$

$\Rightarrow \exists e \in E \,/\, e \notin \mathrm{Ker}(U^{n-1})$

ii) On a $\begin{cases} U^n(e) = 0 \\ U^{n-1}(e) \neq 0 \end{cases}$.

$(e, U(e), \dots, U^{n-1}(e))$ est une base de E.

(Très classique ; vue au TD : début d'l'année)

iii) $\underset{B_e}{\mathrm{mat}}(U) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) $w \in P_U \Leftrightarrow Uw - wU = U$

$\Leftrightarrow \underset{B_e}{\mathrm{mat}}(Uw) - \underset{B_e}{\mathrm{mat}}(wU) = \underset{B_e}{\mathrm{mat}}(U)$

On trouve :

$\underset{B_e}{\mathrm{mat}}(Uw) = (\quad)(\quad) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \alpha_0 & \ddots & \\ 0 & \alpha_{n-2} & 0 \end{pmatrix}$

$\underset{B_e}{\mathrm{mat}}(wU) = (\quad)(\quad) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \alpha_1 & \ddots & \\ 0 & \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

D'où :

$w \in P_U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ \alpha_0 - \alpha_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_0 - \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ \dots \\ \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} = 1 \end{cases}$ càd $\Leftrightarrow$ ($\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n-1$; $\alpha_k = \alpha_0 - k$)

(terme général d'1 suite arithmétiq de raison (-1))

5) a) OK

b) OK

c) i) OK (B_e base de E et $w(e) \in E$)

ii) Soit $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

$w(U^i(e)) = U^i(w(e))$ (car $w \in C_U$)

$= U^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k(e)\right)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^{k+i}(e)$

d) $C_U \supset \mathrm{Vect}(Id, U, \dots, U^{n-1})$?

C'est clair, car U^i commute avec U.

$C_U \subset \mathrm{Vect}(Id, U, \dots, U^{n-1})$?

Soit $w \in C_U$. M.q. $w \in \mathrm{Vect}(Id, \dots, U^{n-1})$

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tq $w(e) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k(e)$

M.q. : $w = \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k$, ce qui finira la question.

Il suffit de montrer que w et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k$ coïncident sur la base B_e.

Soit alors $0 \leqslant i \leqslant n-1$. On a :

$w(U^i(e)) \overset{c)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k U^{k+i}(e)$

$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k U^k\right)(U^i(e))$

CQFD

e) $v \in P_U \Leftrightarrow U \circ v - v \circ U = U$

$\Leftrightarrow Uv - vU = Uw_0 - w_0 U$

(car $w_0 \in P_U$)

$\Leftrightarrow U(v - w_0) = (v - w_0)U$

$\Leftrightarrow (v - w_0) \in C_U$

Cad :

$$P_U = \{w_0 + w \ / \ w \in C_U\} \stackrel{\text{noté}}{=} w_0 + C_U$$

Fin