Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.
Je corrigerai le reste après.

Réduction d'endomorphismes et de matrices

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1) Simplifier $f^2(x)$ pour tout $x \in Im(f)$.

2) Justifier que $Im(f)$ est stable par f.
Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur $Im(f)$

3) Montrer que f_1 est un automorphisme de $Im(f)$.

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes quand c'est possible :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1) E l'espace des suites réelles bornées, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(u)(n) = u_{n+1} - u_n$$

2) $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in E,\ \phi(f) = f'$$

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, où $n \geq 1$. Supposons que $rg(f) = 1$.

1) Montrer que tout vecteur non nul de $Im(f)$ est un vecteur propre de f.

2) Montrer que

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow f^2 \neq 0$$

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle :

$$(E)\ X^3 + X = 0\ ,\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E).

1) Montrer que

$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus ker(A^2 + I_3)$$

2) Montrer que

$$\forall\ Y \notin ker(A),\ (Y, AY) \text{ est libre}$$

3) Déterminer le polynôme minimal de A.

4) Montrer que $dim(ker(A)) = 1$

5) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Quelles sont enfin les solutions de l'équation (E) ?

Exercice 7

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de trace non nulle.
Considérons l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$f(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

Notons $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ /\ tr(M) = 0\}$

1) Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$

2) Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0, puis que $dim(E_0(f)) = 1$

3) Montrer que $Im(f) = F$, en précisant $dim(F)$.

4) Montrer F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $tr(A)$.

5) Déduire que f est diagonalisable.

Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.

2) Déterminer le polynôme minimal de M.

3) Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$

1. Montrer que
$$1 \notin S_p(M) \Leftrightarrow M \text{ est inversible}$$

2. Montrer que M est digonalisable.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.
Supposons l'existence de deux réels distincts a et b tels que :

$$(u - aI_E)(u - bI_E) = 0$$

Posons $p = \frac{1}{b-a}(u - aI_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - bI_E)$.

1) Calculer $p + q,\ pq,\ qp,\ p^2$ et q^2

2) En déduire que $E = ker(p) \oplus ker(q)$.

3) Justifier autrement pourquoi on a $E = ker(p) \oplus ker(q)$.

4) Déterminer les éléments propres de u, puis justifier que u est diagonalisable.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Considérons l'application ϕ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi(M) = AM - MB$$

α et β sont deux valeurs propres respectives de A et B.

1) Vérifier que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

2) Justifier l'existence de deux matrices colonnes non nulles C et D telles

$$AC = \alpha C \text{ et } {}^tBD = \beta D$$

3) Calculer $\phi(C\ {}^tD)$ en fonction de C, D, α et β.

4) En déduire que $(\alpha - \beta)$ est valeur propre de ϕ.

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E.
Montrer que si f et g **commutent** alors ils sont **simultanément** diagonalisables.
(c-à-d qu'il existe une base diagonalisant f et g.)

Réduction d'endomorphismes et de matrices

Exercice 1

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

1) Simplifier $f^2(x)$ pour tout $x \in Im(f)$.

2) Justifier que $Im(f)$ est stable par f.
Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur $Im(f)$

3) Montrer que f_1 est un automorphisme de $Im(f)$.

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

Solution

1) Simplifier $f^2(x)$ pour tout $x \in Im(f)$.

Soit $x \in Im(f)$. $(\exists t \in E,\ x = f(t))$

$\Rightarrow f^2(x) = f^3(t)$

$= -f(t)$

$= x$

D'où $\forall x \in Im(f),\ f^2(x) = -x$

2) Justifier que $Im(f)$ est stable par f.

C'est claire (du cours)

3) Montrer que f_1 est un automorphisme de $Im(f)$.

On a : $\forall x \in Im(f),\ f^2(x) = -x$

$\Rightarrow \forall x \in Im(f),\ f_1^2(x) = -x$

$\Rightarrow f_1^2 = -id_{Im(f)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_1 \circ (-f_1) = id_{Im(f)} \\ (-f_1) \circ f_1 = id_{Im(f)} \end{cases}$$

D'où f_1 est bijective $\left(\text{et } f_1^{-1} = -f_1\right)$

---

4) Dans cette question, on suppose que f est de rang fini. Montrer que $rg(f)$ est un entier pair.

On a f de rang fini, càd $Im(f)$ est de dimension finie.

On a $\begin{pmatrix} f_1 \in \mathcal{L}(Im(f)) \\ f_1^2 = -id_{Im(f)} \end{pmatrix}$

D'où $\det(f_1^2) = \det(-id_{Im(f)})$

$\det(\lambda I_E) = \lambda^{\dim E}$

$\Rightarrow (\det(f_1))^2 = (-1)^{\dim(Im(f))}$

$\Rightarrow (-1)^{rg(f)} > 0$

$\Rightarrow$ $rg(f)$ est paire

Fin Exercice 1

Exercice 2

Diagonaliser les matrices suivantes quand c'est possible :

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

---

1) $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

```
In [3]: poly(A)
Out[3]: array([  1.,   1., -10.,   8.])

In [4]: eigvals(A)
Out[4]: array([ 2., -4.,  1.])
```

```
1 from numpy import *
2 from numpy.linalg import *
3 A=array([[0,2,-1],[3,-2,0],[-2,2,1]])
4 #polyn caract de A poly(A), renvoie ses coeff par ordre décroissant
5 #det(A)
6 #eigvals(A) renvoie les val propres répétées AVEC LEURS MULTIPLICITES
```

$\chi_B(X) = X^3 + X^2 - 10X + 8$

On trouve que :

$\chi_B(X) = (X-2)(X+4)(X-1)$

$Sp(B) = \{2, -4, 1\}$

Or $\left(B \in M_3(\mathbb{R})$ et B possède 3 valeurs propres distinctes$\right)$

D'où **B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.**

Diagonalisons B

Il s'agit de déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$B = PDP^{-1}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme associé à B.

On prend $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On cherche une base $B_p=(v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\underset{B_p}{mat}(f) = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c'est-à-dire que :

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 \\ f(v_2) = -4v_2 \\ f(v_3) = v_3 \end{cases}$$

On a $B = \underset{B_c}{mat(f)}$, où $B_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On sait que :

$$\underset{B_c}{mat(f)} = P \underset{B_p}{mat(f)} P^{-1}$$

où $P = P_{B_c, B_p} = \underset{B_c}{mat}(B_p)$

Alors

$$B = P D P^{-1}$$

Reste seulement à déterminer B_p pour qu'on tire P, puis la diagonalisation de B est achevée.

$V_3 = ?$

Posons $V_3 = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f(V_3) = V_3 \iff (f - id_{\mathbb{R}^3})(V_3) = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases}$$

$$\iff V_3 = (x, x, x)$$

$V_3 = (x, y, z)$

$$\iff V_3 \in Vect(1, 1, 1)$$

On prend $\boxed{U_3 = (1,1,1)}$ $\quad P = \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & * & 1 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$

$U_2 = ?$

Posons $U_2 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$f(U_2) = -4U_2 \iff (f + 4\,id_{\mathbb{R}^3})(U_2) = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ 2y = -3x \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \qquad 2y = -3x$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 3x - z = 0 \\ 2y = -3x \\ -2x - 3x + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ 2y = -3x \end{cases} \qquad U_2 = (x,y,z)$$

$$\iff U_2 = \left(x, -\frac{3}{2}x, x\right)$$

$$\iff U_2 \text{ Vect } \left(1, -\frac{3}{2}, 1\right)$$

$\boxed{U_2 = (2, -3, 2)}$ convient $\quad P = \begin{pmatrix} * & 2 & 1 \\ * & -3 & 1 \\ * & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$V_1 = ?$

Posons $V_1 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$f(V_1) = 2V_1 \iff (f - 2id_{\mathbb{R}^3})(V_1) = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2 \cdot \frac{4}{3}y + 2y - z = 0 \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -\frac{2}{3}y \\ x = \frac{4}{3}y \end{cases}$$

$V_1 = (x,y,z)$

$$\iff V_1 = \left(\frac{4}{3}y, y, -\frac{2}{3}y\right)$$

$$\iff u_1 \text{ Vect } \left(\frac{4}{3}, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

$$\boxed{V_1 = (4, 3, -2)}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin :

$$B = PDP^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_C(X) = (X-2)^2(X-3)$, scindé dans $\mathbb{R}$.

Alors :

$$C \text{ diagonalisable dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim(E_2(C)) = 2 \\ \dim(E_3(C)) = 1 \end{cases}$$

On a bien $\dim(E_3(C)) = 1$ car 3 est une valeur propre simple.

Examinons si l'on a $\dim(E_2(C)) = 2$ ou non.

On a :

$$\dim(E_2(C)) = \dim(\ker(C - 2I_3))$$

$$= 3 - rg(C-2I_3) \quad \text{(d'après le théorème du rang)}$$

Et on a :

$$rg(C-2I_3) = rg\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$ (Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes)

$$= rg\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

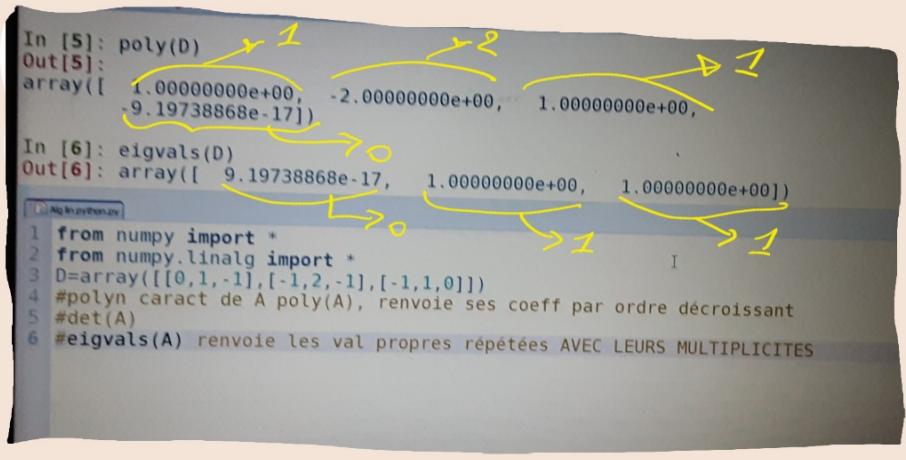
$= 2$ (car les deux lignes sont linéairement indépendantes car non colinéaires)

D'où $\dim(E_2(C)) = 3 - 2 = 1$

$\Rightarrow \dim(E_2(C)) \neq 2$

Enfin : **C n'est pas diagonalisable** □

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$\chi_D(x) = X^3 - 2X^2 + X$

$\chi_D(x) = X(X-1)^2$

$Sp(D) = \{0, 1\}$.

D est-elle diagonalisable ?

$\dim(E_0(D)) = 1 = m_0(D)$ (car 0 valeur propre simple)

$\dim(E_1(D)) = \dim(\ker(D - I_3))$

$= 3 - rg(D - I_3)$

$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda \cdot I_n)$

rappel

Thm du rang matriciel :
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors :
$\dim \ker(A) + rg(A) = n$

$$rg(D - I_3) = rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$= 1$

$\dim(E_1(D)) = 2 = m_1(D)$

D'où D est diagonalisable

Diagonalisation de D :

$D = P \Delta P^{-1}$; où $\Delta = \text{diag}(1,1,0)$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme associé à D.

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = 0 \end{cases}$$

Notons $U = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$U \in E_1(f) \iff (f - id_{\mathbb{R}^3})(U) = 0$

$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\iff -x + y - z = 0$

$\iff y = x + z$

$\iff U = (x, x+z, z)$ $\qquad U = (x,y,z)$

$\iff U \in \text{Vect}\left((1,1,0),(0,1,1)\right)$

$\varepsilon_1 = (1,1,0)$

$\varepsilon_2 = (0,1,1)$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 1 & 1 & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix} ; \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_3) = 0 \end{cases}$$

On trouve après calculs que $\varepsilon_3 = (1,1,1)$ vérifie $f(\varepsilon_3) = 0$.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix};$$

Diagonalisation de $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}=P\Delta P^{-1}\ ;\ \text{où}\quad \Delta=\operatorname{diag}(1,1,0)$$
$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

$\chi_A(X)=X^2+1$

1) Dans $\mathbb{R}$:

A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $\chi_A(x)$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

2) Dans $\mathbb{C}$:

$Sp(A)=\{i,-i\}$; $\chi_A(X)=(X-i)(X+i)$.

Alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, car | $A\in M_2(\mathbb{C})$ A possède 2 valeurs propres distinctes.

Diagonalisation de A dans $\mathbb{C}$

Déterminons P matrice inversible et $\mathcal{D}$ matrice diagonale telles que :

$$A=P\mathcal{D}P^{-1}$$

Avec $\begin{cases}Sp(A)=\{i,-i\}\\ \chi_A(X)=(X-i)(X+i)\end{cases}$ on peut prendre $\mathcal{D}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(i,-i)$.

Reste à déterminer P :

C'est clair maintenant que la relation $A=P\mathcal{D}P^{-1}$ laisse penser à la formule de changement de base pour un endomorphisme :

Considérons alors $f\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ l'endom canoniquement associé à A.

On a alors $A = \underset{B_c}{mat}(f)$, où B_c la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

Cherchons une base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{C}^2$ telle que :

$$\underset{S}{mat}(f) = D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Càd telle que $\boxed{\begin{array}{l} f(\varepsilon_1) = i\varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = -i\varepsilon_2 \end{array}}$

☆ Une fois on trouve S, c'est fini, car $P = P_{B_c,S}$ vérifie :

$$A = PDP^{-1}$$

via la formule du changement de base.

Détermination de ε_1 tel que $f(\varepsilon_1) = i\varepsilon_1$

Posons $\varepsilon_1 = (x, y) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$f(\varepsilon_1) = i\varepsilon_1 \iff (f - i\,Id_{\mathbb{C}^2})(\varepsilon_1) = 0$$

$$\iff (A - iI_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = ix \\ iy = -x \end{cases}$$

$$\iff y = ix$$

$$\iff \varepsilon_1 = (x, ix)$$

$\varepsilon_1 = (x, 0)$

$$\iff \varepsilon_1 = x(1, i)$$

$$\iff \varepsilon_1 \in Vect((1, i))$$

Ainsi : $\boxed{\varepsilon_1 = (1, i) \text{ convient}}$ □

Détermination de ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = -i\varepsilon_2$

Posons $\varepsilon_2 = (x, y) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$f(\varepsilon_2) = -i\varepsilon_2 \iff (f + i\,I_{\mathbb{C}^2})(\varepsilon) = 0$$

$$\iff (A + iI_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} ix + y = 0 \\ -x + iy = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -ix \\ iy = x \end{cases}$$

$$\iff y = -ix$$

$$\iff \varepsilon_2 = (x, -ix)$$

$$\iff \varepsilon_2 = x(1, -i)$$

$$\iff \varepsilon_2 \in \text{Vect}\,((1, -i))$$

$\varepsilon_2 = (x, 0)$

Ainsi : $\boxed{\varepsilon_2 = (1, -i) \text{ convient}}$ □

Enfin, la base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, où $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, i) \\ \varepsilon_2 = (1, -i) \end{cases}$ vérifie $\underset{S}{\text{mat}}(f) = D$.

Et donc $P = P_{B_C, S} = \underset{B_C}{\text{mat}}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

Réduction de A :

$A = PDP^{-1}$, où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ □

À retenir

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ (matrice réelle).

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$AX = \lambda . X \iff A\overline{X} = \overline{\lambda} . \overline{X}$$

D'où :

$\lambda \in Sp(A) \iff \overline{\lambda} \in Sp(A)$

$X \in E_\lambda(A) \iff \overline{X} \in E_{\overline{\lambda}}(A)$

$(X_1, \dots, X_p)$ base de $E_\lambda(A) \iff (\overline{X_1}, \dots, \overline{X_p})$ base de $E_{\overline{\lambda}}(A)$

Par exemple dans diagonalisation de la dernière matrice A :

Quant on avait trouvé que $\varepsilon_1 = (1, i)$ vérifie $f(\varepsilon_1) = i\varepsilon_1$

c'est prévisible que $\varepsilon_2 = \overline{\varepsilon_1} = (1, -i)$ vérifie $f(\varepsilon_2) = \overline{i}\,\varepsilon_2$;

soit $f(\varepsilon_2) = -i\varepsilon_2$

Fin exercice 2

Exercice 3

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

CORRECTION

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = X^3 - X^2 - X + 1$.

Factorisons $\chi_A(X)$.

1 en est une racine évidente.

Factorisons par $(X-1)$. On trouve :

$$\chi_A(X) = (X+1)(X-1)^2.$$

A est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, car $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}$.

Trigonalisons la matrice A.

Déterminons P matrice inversible et T matrice triangulaire supérieure telles que : $A = PTP^{-1}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On a $\underset{B_c}{mat}(f) = A$, où B_c la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$\chi_f(X) = (X+1)(X-1)^2$.

$Sp(f) = \{-1, 1\}$.

$E_{-1}(f) = ?$ et $E_1(f) = ?$

On trouve après calculs que :

$E_{-1}(f) = \text{Vect}((1,1,2))$ et $E_1(f) = \text{Vect}((1,0,1))$

f n'est pas diagonalisable car $\dim(E_1(f)) \neq m_1(f)$: la multiplicité de f.

Déterminons une base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\underset{S}{mat}(f) = T$ soit triangulaire supérieure.

Déterminons une base $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\underset{S}{mat}(f)$ soit de la forme :

$$\underset{S}{mat}(f) = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \chi_f(X) = (X+1)(X-1)^2$$

On a : $\begin{cases} E_{-1}(f) = \text{Vect}((1,1,2)) \\ E_1(f) = \text{Vect}((1,0,1)) \end{cases}$.

Posons $\varepsilon_1 = (1,1,2)$ et $\varepsilon_2 = (1,0,1)$. On a bien $\begin{cases} f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 \\ f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \end{cases}$

Déterminons ε_3 tel que $\underset{S}{mat}(f)$ soit :

$$\underset{S}{mat}(f) = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

C'est tel que : $\boxed{f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2}$

Posons $\varepsilon_3 = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_2 = (1,0,1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x \quad - 2z = 0 \\ 3x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x = z \\ 3x - y - 3z = 1 \end{cases} \qquad \left(\text{on remplacera } z \text{ par } x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = z \end{cases} \qquad \varepsilon_3 = (x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_3 = (x, -1, x) \quad \left(\text{une infinité de Choix}\right)$$

Prenons $\varepsilon_3 = (0,-1,0)$ "i pour $x = 0$"

On a : $\underset{S}{mat}(f) = \begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = T$

On a enfin, via la formule de changement de base :

$$A = P\,T\,P^{-1}$$

où $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, triang Sup.

$$P = P_{B_c, S} = mat_{B_c}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Car $\begin{cases} \varepsilon_1 = (1,1,2) \\ \varepsilon_2 = (1,0,1) \\ \varepsilon_3 = (0,-1,0) \end{cases}$

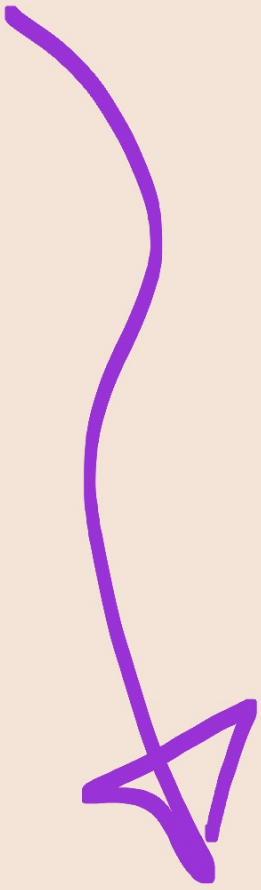


Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\chi_B(X) = (X-1)^3$

$E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

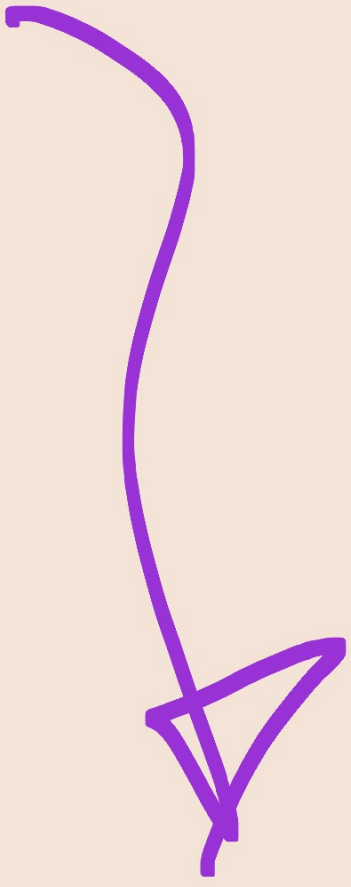


Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\chi_C(X) = (X-1)^3$

$E_1(C) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$



Exercice 4

Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1) E l'espace des suites réelles bornées, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall u \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(u)(n) = u_{n+1} - u_n$$

2) $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\forall f \in E,\ \phi(f) = f'$$

1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Sp(F) \iff \exists (u) \in E \setminus \{0\},\ F(u) = \lambda u$

$\iff \exists (u) \in E \setminus \{0\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (\lambda+1) \cdot u_n$

$\iff \exists (u) \in E \setminus \{0\},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \cdot (\lambda+1)^n$

$\iff$ La suite $((\lambda+1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée

$\iff \lambda + 1 \in [-1, 1] \iff \lambda \in [-2, 0]$

$Sp(F) = [-2, 0]$.

Soit $\lambda \in [-2, 0] = Sp(F)$.

$(u) \in E_\lambda(F) \iff F(u) = \lambda u \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (\lambda+1) u_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 (\lambda+1)^n$

$E_\lambda(F) = Vect\left((\lambda+1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (droite vectorielle)

2

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\lambda \in Sp(F) \iff \exists f \in E \setminus \{0\} / F(f) = \lambda f$

$\iff \exists f \in E \setminus \{0\} / f' = \lambda f$

Ce qui est vrai car $x \mapsto e^{\lambda x}$ convient.

$Sp(F) = \mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R} = Sp(F)$. Soit $f \in E$. On a :

$f \in E_\lambda(F) \iff F(f) = \lambda f$

$\iff f' = \lambda f$

$\iff f \in Vect(x \mapsto e^{\lambda x})$

La solution générale de l'équa diff « $f' = \lambda f$ » est : $Ce^{\lambda x}$ où $C \in \mathbb{R}$

$E_\lambda(F) = Vect(x \mapsto e^{\lambda x})$

droite vectorielle

Fin Exercice 4

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, où $n \geq 1$. Supposons que $rg(f) = 1$.

1) Montrer que tout vecteur non nul de $Im(f)$ est un vecteur propre de f.

2) Montrer que

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow f^2 \neq 0$$

Solution

1) Montrer que tout vecteur non nul de $Im(f)$ est un vecteur propre de f.

Soit $y \in Im(f)$, avec $y \neq 0$

M que : $(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(y) = \lambda y)$

On a $\begin{pmatrix} y \in Im(f) \setminus \{0\} \\ \dim(Im(f)) = 1 \end{pmatrix}$

D'où $Im(f) = vect(y)$

Or $f(y) \in Im(f)$, alors $f(y) \in vect(y)$

$\Rightarrow$ $\boxed{(\exists \lambda \in \mathbb{K},\ f(y) = \lambda y)}$ □

2) Montrer que

$$f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow f^2 \neq 0$$

($\Rightarrow$)

Méthode 1

Supp que f est diagonalisable, et M que $f^2 \neq 0$

f diagonalisable $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} \text{il existe une base } B \text{ de } E \text{ telle que :} \\ mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \text{où les } \lambda_i \text{ dans } \mathbb{C} \end{pmatrix}$

On a $rg(f) = 1$

$$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \exists k \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } \begin{cases} \lambda_k \neq 0 \\ \forall i \neq k,\ \lambda_i = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\underset{B}{mat}(f) = diag(0, \dots, 0, \lambda_k, 0, \dots, 0)$ (→ $k$ème place)

$$\Rightarrow \underset{B}{mat}(f^2) = diag(0, \dots, 0, \underbrace{\lambda_k^2}_{\neq 0}, 0, \dots, 0) \neq 0$$

D'où $\boxed{f^2 \neq 0}$ □

Méthode 2

Supp que f est diagonalisable, et M que $f^2 \neq 0$

Raisonnons par l'absurde, et Supp que $f^2 = 0$.

Alors f est nilpotent.

$$\Rightarrow Sp(f) = \{0\}$$

Or f est diagonalisable, alors

$$\left(\begin{array}{l} \text{il existe une base } B \text{ de } E \text{ telle que :} \\ \underset{B}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \text{où les } \lambda_i \text{ dans } \mathbb{C} \end{array} \right)$$

Or $Sp(f)=\{0\}$, alors : $(\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lambda_i = 0)$

Par suite $mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

D'où $f = 0$

$\Rightarrow rg(f) = 0$

Ce qui est absurde, car $rg(f) = 1$.

Enfin, $\boxed{f^2 \neq 0}$ □

($\Longleftarrow$)

Supp que $f^2 \neq 0$, et M que f est diagonalisable.

$f^2 \neq 0 \Rightarrow (\exists x_0 \in \mathbb{C}^n,\ f^2(x_0) \neq 0)$

Il est clair que $f(x_0) \neq 0$ et que $f(x_0) \in Im(f)$

D'où $f(x_0)$ est un vecteur propre de f. (d'après 1o)

Notons $e_1 = f(x_0)$.

On a $\begin{cases} f(e_1) = \lambda_1 e_1, \text{ où } \lambda_1 \in \mathbb{C} \\ Im(f) = vect(e_1) \ (\text{car } rg(f)=1) \end{cases}$

Soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ (via le TBI).

On a : $\underset{\mathcal{B}}{mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Car $\left(\forall\ 2 \leq i \leq n,\ f(e_i) \in Vect(e_1)\right)$

On a $\lambda_1 \neq 0$, car $\underbrace{f(e_1)}_{=f^2(x_0)\neq 0} = \lambda_1 \underbrace{e_1}_{\neq 0}$

M que f est diagonalisable on veut

D'où $\left| \begin{array}{l} Sp(f) = \{\lambda_1, 0\} \\ \chi_f(x) = (X-\lambda_1)\cdot X^{n-1} \end{array} \right.$

Pour m que f est diagonalisable, il reste à vérifier que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dim(E_{\lambda_1}) = 1 \\ \dim(E_0) = n-1 \end{array}}$$

Pour $\dim(E_{\lambda_1}) = 1$, c'est vérifié car λ_1 valeur propre simple.

Pour $\dim(E_0) = n-1$:

$\dim(E_0) = \dim(\ker f)$

$= n - rg(f)$ (théorème du rang)

$= n-1$ (car $rg(f)=1$)

D'où $\boxed{\dim(E_0) = n-1}$

Enfin, f est diagonalisable □

Fin Exercice 5

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle :

$$(E)\ X^3 + X = 0\ ,\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E).

1) Montrer que
$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus ker(A^2 + I_3)$$

2) Montrer que
$$\forall\ Y \notin ker(A),\ (Y, AY)\ est\ libre$$

3) Déterminer le polynôme minimal de A.

4) Montrer que $dim(ker(A)) = 1$

5) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Quelles sont enfin les solutions de l'équation (E) ?

Solution

$$(E)\ X^3 + X = 0\ ,\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E).

1) Montrer que
$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus ker(A^2 + I_3)$$

On a

$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(0)$

$= \ker\left(A(A^2 + I_3)\right)$

$= \ker(A) \oplus \ker(A^2 + I_3)$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, du fait que X et (X^2+1) sont premiers entre eux. □

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle :

$$(E)\ X^3 + X = 0\ ,\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E).

1) Montrer que
$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus ker(A^2 + I_3)$$

2) Montrer que
$$\forall\ Y \notin ker(A),\ (Y, AY)\ est\ libre$$

Soit $Y \notin \ker(A)$. Mq (Y, AY) est libre.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que (Y, AY) est liée.

$\Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ AY = \lambda Y)$

Ona: $A^3 + A = 0$

$\Rightarrow (A^3+A)Y = (\lambda^3+\lambda)Y$

Or $A^3+A=0$ (car A solution de (E)).

Alors $(\lambda^3+\lambda)Y = 0$

$\Rightarrow \lambda^3+\lambda = 0$ (car $Y \neq 0$, puisque $Y \notin \ker(A)$)

$\Rightarrow \lambda(\lambda^2+1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ (car $\lambda^2+1 \neq 0$, λ étant réel)

$\Rightarrow AY = 0$ (car $AY = \lambda Y$)

$\Rightarrow Y \in \ker(A)$

Ce qui est absurde, car $Y \notin \ker(A)$. □

3) Déterminer le polynôme minimal de A.

On a $A^3+A=0$

$\Rightarrow \pi_A \mid X(X^2+1)$

$\Rightarrow \pi_A \in \{X,\ X^2+1,\ X(X^2+1)\}$

i) $\pi_A = X$ est impossible ; En effet

Si $\pi_A = X$, alors $A = 0$ (car $\pi_A(A)=0$)

Ce qui est faux, car $A \neq 0$. □

ii) $\pi_A = X^2+1$ est aussi impossible ; en effet :

Supp que $\pi_A = X^2+1$

$\Rightarrow A^2+I_3 = 0$

$\Rightarrow A^2 = -I_3$

$\Rightarrow \det(A^2) = \det(-I_3)$

$\Rightarrow (\det(A))^2 = (-1)^3$

$\Rightarrow (-1) \geq 0$ absurde. □

Enfin $\boxed{\pi_A(X) = X(X^2+1) = X^3+X}$

4) Montrer que $dim(ker(A)) = 1$

On a $\pi_A = X^3+X \Rightarrow \begin{cases} \chi_A(X) = \pi_A(X) = X^3+X \\ \text{car } \pi_A / \chi_A \text{ et ont le même degré} \end{cases}$

D'où $\begin{cases} Sp(A) = \{0\} \\ m_0(A) = 1 \end{cases}$

On a bien une valeur propre simple

alors $\dim E_0(A) = m_0(A) = 1$

D'où $\boxed{\dim \ker(A) = 1}$ □

5) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'end canoniquement associé à A.

On a $\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3})$

Il s'agit alors de montrer qu'il existe une base B de $\mathbb{R}^3$ tq:

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $y_0 \in \ker(f) \setminus \{0\}$. On a $f(y_0) = 0$

Soit $y_1 \in \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3}) \setminus \{0\}$.

Alors $y_1 \notin \ker(f)$, car $\ker(f) \cap \ker(f^2 + id_{\mathbb{R}^3}) = \{0\}$

2) $\Rightarrow (y_1, f(y_1))$ est une famille libre de $\ker(f^2+id_{\mathbb{R}^3})$

$\Rightarrow$ elle en est une base, car $\dim \ker(f^2+id_{\mathbb{R}^3}) = 2$ vu :

$$\mathbb{R}^3 = \ker(f) \oplus \ker(f^2+id_{\mathbb{R}^3})$$

Considérons la base adaptée : $B = (y_0, y_1, f(y_1))$

On a $\begin{cases} f(y_0) = 0 \\ f^2(y_1) = -y_1 \end{cases}$ $(y_1 \in \ker(f^2+id_{\mathbb{R}^3}))$

D'où $\underset{B}{mat}(f) = \begin{array}{c} \\ y_0 \\ y_1 \\ f(y_1) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(y_0) & f(y_1) & f(f(y_1)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Enfin A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ □

L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle :

$$(E)\ X^3 + X = 0\ ,\ X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Soit A une matrice non nulle solution de (E).

1) Montrer que
$$\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = ker(A) \oplus ker(A^2 + I_3)$$

2) Montrer que
$$\forall\, Y \notin ker(A),\ (Y, AY)\ est\ libre$$

3) Déterminer le polynôme minimal de A.

4) Montrer que $dim(ker(A)) = 1$

5) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6) Quelles sont enfin les solutions de l'équation (E) ?

D'après les questions précédentes : Si A est une solution non nulle de (E) alors A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réciproquement :

Si A est une matrice semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors A est non nulle et est

solution de (E) ; en effet :

On a : $A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$, où $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

$A \neq 0$ en clair.

$$A^3 + A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 P^{-1} + P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + A = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

D'où A est solution de (E).

On conclut que les solutions non nulles de (E) sont les matrices semblables à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice nulle est bien solution de l'équation $(E) : X^3 + X = 0$.

Enfin, on conclut que :

Les solutions de l'équation matricielle $\left((E) : X^3 + X = 0 ;\ X \in M_3(\mathbb{R})\right)$ sont les matrices semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et la matrice nulle.

Fin Exercice 6

Exercice 7

Soit A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de trace non nulle.
Considérons l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$f(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

Notons $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ tr(M) = 0\}$

1) Justifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$
2) Montrer que A est vecteur propre de f associé à la valeur propre 0, puis que $dim(E_0(f)) = 1$
3) Montrer que $Im(f) = F$, en précisant $dim(F)$.
4) Montrer F est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $tr(A)$.
5) Déduire que f est diagonalisable.

1) Facile

2) i) $f(A) = \dots = 0$ or $A \neq 0$

ii) $M \in E_0(f) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow M = \frac{tr(M)}{tr(A)} \cdot A \Rightarrow M \in Vect(A)$.

D'où $E_0(f) \subset Vect(A)$.

or $A \in E_0(f) \Rightarrow Vect(A) \subset E_0(f)$.

D'où $E_0(f) = Vect(A)$, et donc $\dim(E_0(f)) = 1$

3) $Im(f) \subset F$; En effet :

Soit $B = f(M) \in Im(f)$. On a :

$tr(B) = tr(tr(A).M - tr(M).A) \overset{\text{tr est linéaire}}{=} tr(A)tr(M) - tr(M).tr(A) = 0$

D'où $B \in F$ ☐

Et $\dim(Im(f)) = \dim(F)$; En effet :

$\dim(Im(f)) = n^2 - \dim(\underbrace{Ker(f)}_{=E_0(f)}) = n^2 - 1$

$F = Ker(tr)$ et tr forme linéaire non nulle de l'espace $M_n(\mathbb{R})$

D'où F est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$; donc $\dim(F) = n^2 - 1$

Ainsi $\begin{cases} Im(f) \subset F \\ \dim(Im(f)) = \dim F \end{cases}$, donc $Im(f) = F$ ☐

4) $M \in E_{tr(A)}(f) \Leftrightarrow f(M) = tr(A).M \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow tr(M) = 0 \Leftrightarrow M \in F$

5) f diagonalisable ; En effet :

On a $\dim(E_0(f)) = 1$ et $\dim(E_{tr(A)}(f)) = n^2 - 1$

En plus $E_0(f)$ et $E_{tr(A)}(f)$ sont en somme directe (car $tr(A) \neq 0$)

D'où $E_0(f) \oplus E_{tr(A)}(f) = M_n(\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ diagonalisable

Fin Exercice 7

Exercice 8

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Pour A

$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$, soit f l'end can associé à A et $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$rg(A) = 2$ $\left(= rg\left(\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}\right)\right)$, donc $0 \in Sp(A) = Sp(f)$ et $\dim E_0(f) = n-2$

Cherchons les éventuelles valeurs propres autres que 0 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \chi_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & (\lambda-1) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda & -1 \\ -\lambda & \cdots & -\lambda & \lambda(\lambda-1) \end{vmatrix} = 0 \qquad (L_n \leftarrow \lambda L_n)$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda & & 0 & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda(\lambda-1)-(n-1) \end{vmatrix} = 0 \qquad (L_n \leftarrow L_1 + \dots + L_n)$$

$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)-(n-1) = 0$ (car $\lambda \neq 0$ et c'est un dét triang sup)

$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0$

$\Delta = 4n-3 > 0$ et $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ les deux solutions réelle distinctes.

Ainsi λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes et non nulles de f.

or $\dim E_0(f) = n-2$ et $\begin{cases} \dim E_{\lambda_1}(f) \geq 1 \\ \dim E_{\lambda_2}(f) \geq 1 \end{cases}$ alors $E = E_0(f) \oplus E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_2}(f)$

et donc f diagonalisable (et A diagonalisable dans $\mathbb{R}$).

$E_0(f) = ?$; $E_{\lambda_1}(f) = ?$; $E_{\lambda_2}(f) = ?$

i) $E_0(f) = ?$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in E_0(f) \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + \dots + x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - \dots - x_{n-1} \\ x_n = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = (-x_2 - \dots - x_{n-1}, x_2, \dots, x_{n-1}, 0)$

$\Leftrightarrow x \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$; où $\begin{cases} \varepsilon_1 = (-1, 1, 0, \dots, 0) \\ \varepsilon_2 = (-1, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ \dots \\ \varepsilon_{n-2} = (-1, 0, \dots, 1, 0) \end{cases}$

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2})$ base de $E_0(f)$

ou encore :

$A = PDP^{-1}$; où $\begin{cases} P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \vdots \\ & 1 & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \text{(0)} & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2) \\ \lambda_1 = \frac{1-\sqrt{4n-3}}{2} \; ; \; \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \end{cases}$

Pour B

N.B : A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables (voir Chapitre « Espaces préhilbertiens », Mais ici on ne l'appliquera pas

$B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$; $rg(B) = 1 \Rightarrow$ B non inversible

$\Rightarrow$ $0 \in Sp(B)$ et $\dim E_0(B) = n-1$ (thm du rang)

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à B et soit $B_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On a : $(\forall 1 \leq i \leq n,\ f(e_i) = e_1 + \dots + e_n)$

$\Rightarrow f(e_1 + \dots + e_n) = n(e_1 + \dots + e_n)$

D'où $n \in Sp(f) = Sp(B)$.

or $\dim E_0(B) = \dim E_0(f) = n-1$ alors $\dim E_n(f) = 1$

Ainsi $n \in Sp(f)$ et $E_n(f) = Vect(e_1 + \dots + e_n)$.

$E_0(f) = ?$:

$x = (x_1, \dots, x_n) \in E_0(f) \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - \dots - x_n$

$\Leftrightarrow x = (-x_2 - \dots - x_n, x_2, \dots, x_n)$

D'où $E_0(f) = Vect((-1,1,0,\dots,0); (-1,0,1,0,\dots,0); \dots; (-1,0,\dots,0,1))$.

Notons $S = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$; où $\begin{cases} \varepsilon_1 = (-1,1,0,\dots,0) \\ \varepsilon_2 = (-1,0,1,0,\dots,0) \\ \dots \\ \varepsilon_{n-1} = (-1,0,\dots,0,1) \\ \varepsilon_n = (1,1,\dots,1) \end{cases}$, on a :

- $mat_S(f) = diag(0, \dots, 0, n)$, et donc f (resp. B) est diagonalisable.

Et on a : $B = PDP^{-1}$; où $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$D = diag(0, \dots, 0, n)$

Fin Exercice 8

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.
2) Déterminer le polynôme minimal de M.
3) Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

1

Méthode 1 : M symétrique réelle $\Rightarrow$ M diagonalisable

Méthode 2 :

$M+I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(M+I) = 1$ ($M+I$ non inversible donc)

$\Rightarrow (-1) \in Sp(M)$ et $\dim E_{-1}(M) = n-1$ (théorème du rang)

Remarquons que $C_1 + \cdots + C_n = (n-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (C_i les colonnes de M)

$= M\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $(n-1) \in Sp(M)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $(n-1)$

or $\dim E_{-1}(M) = n-1$ et $\dim E_{n-1}(M) \geq 1$ alors $\dim E_{n-1}(M) = 1$

$E_{n-1}(M) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Et $M_{n1}(\mathbb{R}) = E_{-1}(M) \oplus E_{n-1}(M)$

donc M diagonalisable ∎

NB : Ce n'est pas demandé, mais facile à diagonaliser M, vous trouverez :

$M = PDP^{-1}$, où $D = diag(-1, \ldots, -1, n-1)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & -1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.
2) Déterminer le polynôme minimal de M.
3) Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Solution

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.

$M + I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

On a : $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (M + I_n)^2 = n(M + I_n)$

D'où $P(M) = 0$, où $P(X) = (X+1)^2 - n(X+1)$

On a $P(X) = (X+1)(X+1-n)$ est un polynôme annulateur de M, qui est scindé dans $\mathbb{R}$ et à racines simples.

Par suite M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.

2) Déterminer le polynôme minimal de M.

On a $P(M) = 0$, où $P(X) = (X+1)(X+1-n)$

D'où $\Pi_M(X) \mid (X+1)(X+1-n)$

$\Rightarrow \left(\Pi_M(X) = X+1 \text{ ou } \Pi_M(X) = X+1-n \text{ ou } \Pi_M(X) = (X+1)(X+1-n) \right)$

$\Pi_M(X) = X+1$ est impossible car sinon aurait $\Pi_M(M) = M + I_n = 0$

Càd $M = -I_n$. Ce qui est faux.

De même, $\Pi_M(X) = X+1-n$ est impossible.

Ainsi : $\boxed{\Pi_M(X) = (X+1)(X+1-n)}$

□

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$.

1) Montrer que M est diagonalisable.

2) Déterminer le polynôme minimal de M.

3) Calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. $M^p = ?$

On a $\Pi_M(X) = (X+1)(X+1-n)$.

D'après la division euclidienne de X^p par $\Pi_M(X)$, on a :

$$X^p = \Pi_M(X) \cdot Q(X) + (\alpha + \beta X)$$

où $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\Rightarrow M^p = \underbrace{\Pi_M(M)}_{=0} \cdot Q(M) + (\alpha I_n + \beta M)$$

$$\Rightarrow \boxed{M^p = \alpha I_n + \beta M}.$$

Déterminons α et β :

Remplaçons dans $X^p = \Pi_M(X) \cdot Q(X) + (\alpha + \beta X)$, X par (-1) puis $(n-1)$

on aura le système $\begin{cases} \alpha - \beta = (-1)^p \\ \alpha + (n-1)\beta = (n-1)^p \end{cases}$

On trouve : $\begin{cases} \alpha = \dfrac{(n-1)^p + (-1)^p (n-1)}{n} \\ \beta = \dfrac{(n-1)^p - (-1)^p}{n} \end{cases}$

$$\boxed{M^p = \alpha I_n + \beta M}$$

2) 2) $Sp(M) = \{-1, n-1\}$ et M diagonalisable $\Rightarrow$ $\Pi_M(X) = (X+1)(X-(n-1))$

3) 3) $M^p = ?$

On effectue la division euclidienne de X^p par $\Pi_M(X)$, on trouve :

$X^p = \Pi_M(X) \cdot Q(X) + (a_p X + b_p)$; avec $\begin{cases} a_p = (n-1)^{p-1} \\ b_p = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} X = -1 \Rightarrow \dots \\ X = n-1 \Rightarrow \dots \end{array} \right)$

$\Rightarrow M^p = \underbrace{\Pi_M(M)}_{=0} \cdot Q(M) + (n-1)^{p-1} \cdot M \quad (\forall p \geq 1)$

C/C : $\forall p \geq 1, \; M^p = (n-1)^{p-1} \cdot M$

$M^0 = I_n$

Fin Exercice 9

Exercice 10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + {}^tM = I_n$

1. Montrer que
$$1 \notin S_p(M) \Leftrightarrow M \text{ est inversible}$$
2. Montrer que M est digonalisable.

(1)

$1 \notin S_p(M) \Leftrightarrow (M - I_n)$ inversible

$\Leftrightarrow ({}^tM - I_n)$ inversible

$\Leftrightarrow -M^2$ inversible

$\Leftrightarrow M^2$ inversible

$\Leftrightarrow \det(M^2) \neq 0$

$\Leftrightarrow (\det(M))^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \det(M) \neq 0$

$\Leftrightarrow M$ inversible

// A inversible $\Leftrightarrow {}^tA$ l'est

(2)

Il suffit de montrer que M s'annulle par un polynôme scindé à racines simples.

On a ${}^tM = I - M^2$

$\Rightarrow M = I - {}^t(M^2)$

$= I - ({}^tM)^2$

$\Rightarrow M = I - (I-M^2)^2 \quad (\text{car } {}^tM = I - M^2)$

$\Rightarrow M = 2M^2 - M^4$

$\Rightarrow M^4 - 2M^2 + M = 0$

$\Rightarrow P(X) = X^4 - 2X^2 + X$ annulle M

donc $P(X) = X(X-1)(X-x_1)(X-x_2)$; où $\begin{cases} x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$P(X)$ est scindé dans $\mathbb{C}$ et à racines simples, qui annulle M

D'où M diagonalisable.

Fin Exercice 10

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas une homothétie.

Supposons l'existence de deux réels distincts a et b tels que :

$$(u - aI_E)(u - bI_E) = 0$$

Posons $p = \frac{1}{b-a}(u - aI_E)$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - bI_E)$.

1) Calculer $p + q$, pq, qp, p^2 et q^2
2) En déduire que $E = ker(p) \oplus ker(q)$.
3) Justifier autrement pourquoi on a $E = ker(p) \oplus ker(q)$.
4) Déterminer les éléments propres de u, puis justifier que u est diagonalisable.

---

1) $p+q = I_E$; $pq = qp = 0$; $p^2 = p$; $q^2 = q$ (faites vos calculs)

2) NB : Si vous avez « Montrer que », juste utiliser le thm de décomposition des noyaux ; c'est rapide.
Ici, on a « Déduire »

(i) $E = Kerp + Kerq$?

Soit $x \in E$, on a : $x = \underbrace{p(x)}_{\in Kerq} + \underbrace{q(x)}_{\in Kerp}$ (car $p+q = I_E$)

car $pq = qp = 0$

(ii) $Kerp \cap Kerq = \{0\}$

Soit $x \in Kerp \cap Kerq$. Montrons que $x = 0$.

On a $\begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = ax \\ u(x) = bx \end{cases}$

$\Rightarrow \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

3) C'est déjà dit : thm de décomposition des noyaux.

4) On a $E = \ker(u - aI_E) \oplus \ker(u - bI_E)$. (2)

i) $a \in Sp(u)$: [illegible]

Supposons $a \notin Sp(u)$, alors $\ker(u - aI_E) = \{0\}$

et (2) $\Rightarrow E = \ker(u - bI_E)$

$\Rightarrow u - bI_E = 0$

$\Rightarrow u = bI_E$, donc u homothétie, ce qui est absurde

ii) De même, $b \in Sp(u)$

iii) $E_a(u) = \ker p$ et $E_b(u) = \ker q$

iv) On a $E = E_a(u) \oplus E_b(u)$ et $Sp(u) = \{a, b\}$

D'où u diagonalisable

□

NB : Pour répondre à 4°), on peut faire via le polynôme minimal :

$\Pi_u(X) / (X-a)(X-b) \Rightarrow \begin{cases} \Pi_u(X) = (X-a) \\ \text{ou} \quad \ldots = (X-b) \\ \text{ou} \quad \ldots = (X-a)(X-b) \end{cases}$ etc

Fin Exercice 11

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Considérons l'application ϕ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi(M) = AM - MB$$

α et β sont deux valeurs propres respectives de A et B.

1) Vérifier que $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
2) Justifier l'existence de deux matrices colonnes non nulles C et D telles

$$AC = \alpha C \text{ et } {}^tBD = \beta D$$

3) Calculer $\phi(C\ {}^tD)$ en fonction de C, D, α et β.
4) En déduire que $(\alpha - \beta)$ est valeur propre de ϕ.

$\mathcal{P}_{\theta}$ 1

1) OK
2) $(\exists C \neq 0 / AC = \alpha C)$ car $\alpha \in Sp(A)$
$(\exists D \neq 0 / {}^tBD = \beta D)$ car $\beta \in Sp(B) = Sp({}^tB)$
3) $\phi(C\,{}^tD) = AC\,{}^tD - C\,{}^tD\,B = (AC)\,{}^tD - C[{}^t({}^tBD)]$
$= \alpha C\,{}^tD - C\,{}^t(\beta D) = (\alpha - \beta)(C\,{}^tD)$
4) On a $\phi(C\,{}^tD) = (\alpha-\beta)(C\,{}^tD)$ reste à montrer que $C\,{}^tD \neq 0$
Notons $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix}$.
$C\,{}^tD = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}(D_1 \dots D_n) \Rightarrow (C\,{}^tD)_{ij} = C_i D_j$
$\begin{pmatrix} C \neq 0 \Rightarrow \exists k / C_k \neq 0 \\ D \neq 0 \Rightarrow \exists l / D_l \neq 0 \end{pmatrix}$; donc $(C\,{}^tD)_{kl} \neq 0$
$\Rightarrow C\,{}^tD \neq 0$ ∎

Fin Exercice 12

Exercice 13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables de E.

Montrer que si f et g **commutent** alors ils sont **simultanément** diagonalisables.

(c-à-d qu'il existe une base diagonalisant f et g.)

CORRECTION

On a f est diagonalisable.

Notons $S_p(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ le spectre de f.

On a alors : $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_s}(f)$

Pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par g, car $fg = gf$.

Notons g_i l'endomorphisme induit par g sur $E_{\lambda_i}(f)$.

$g_i \in \mathcal{L}(E_{\lambda_i}(f))$ est diagonalisable, car g l'est.

Notons B_i une base de $E_{\lambda_i}(f)$, formée de vecteurs propres de g_i.

Alors elle est formée de vecteurs propres de g aussi, car :

$$\left(\forall x \in E_{\lambda_i}(f),\ g(x) = g_i(x)\right)$$

Les vecteurs de B_i sont aussi des vecteurs propres de f ; car chaque vecteur e de B_i vérifie : " $f(e_i) = \lambda_i e_i$ ".

Notons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$.

$\mathcal{B}$ est donc une base de E formée de vecteurs propres de g et de f.

C'est-à-dire que f et g sont simultanément diagonalisables.

□

FIN