Exercice II : Solution

1) $P(X) = X(X-j)(X-\bar{j})$ annulle A et ses racines $0, j, \bar{j}$ sont les valeurs propres possibles de A.

2) $P(X)$ ci-dessus est scindé dans $\mathbb{C}$ et à racines simples, de plus il annule A, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

3) Supp. que A est inversible, alors $0 \notin Sp(A)$.

$\Rightarrow Sp(A) \subset \{j, \bar{j}\}$.

En plus, A est réelle, alors si ω est une valeur propre de A, $\bar{\omega}$ le sera aussi et avec la même multiplicité que ω.

D'où $Sp(A) = \{j, \bar{j}\}$.

(bien entendu $Sp(A) \neq \emptyset$; on est dans $\mathbb{C}$)

Notons r la multiplicité de la valeur propre j (donc $\bar{j}$).

On a :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= j^r \cdot \bar{j}^r \\
&= (j \cdot \bar{j})^r \\
&= |j|^{2r} \\
&= 1 \quad (\text{car } |j| = 1)
\end{aligned}$$

Fin de l'Exercice II