

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,

EXTRAIT

Exercice (Noté sur 4 points sur 20)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x | y \rangle$ et $\|x\|$ représente la norme du vecteur x . Pour tout vecteur u non nul de E , on note φ_u l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2 \frac{\langle x | u \rangle}{\langle u | u \rangle} u - x.$$

1.1. Étude de l'application φ_u

1.1.1. Montrer que φ_u est un endomorphisme de E .

1.1.2. En calculant $\varphi_u \circ \varphi_u$, montrer que φ_u est un automorphisme de E et déterminer son inverse φ_u^{-1} .

1.1.3. Soit x appartenant à E , calculer $\langle \varphi_u(x) | \varphi_u(x) \rangle$.

1.1.4. En déduire que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) | \varphi_u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

1.1.5. On note D_u la droite vectorielle de base u et $H_u = D_u^\perp$.

Déterminer l'image de D_u par φ_u .

En déduire sans calcul que H_u est stable par φ_u .

1.1.6. Reconnaître alors la nature géométrique de l'endomorphisme φ_u et en donner les éléments caractéristiques.

1.2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x + y + z = 0$.

1.2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de $H^\perp$.

1.2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur $H^\perp$ puis celle de la projection orthogonale sur H .

1.2.3. Soit v un vecteur unitaire de $H^\perp$. Écrire la matrice de φ_v dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.3. Étude d'une réciproque

Soit ψ un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant :

$$\forall x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \Delta^\perp, \quad \psi(x) = -x.$$

1.3.1. Montrer que $\psi \circ \psi = \text{id}_E$ et que ψ conserve le produit scalaire.

1.3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur u de E tel que $\psi = \varphi_u$.