Corrigé

CCP - MP - Maths 1 - 2018

ESTIMATIONS NUMÉRIQUES D'INTÉGRALES

Partie I - « Permutation limite-intégrale » et intégrale de Gauss

I.1 - Utilisation d'une série entière

Q1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, série entière de rayon de convergence infini.

En intégrant la série entière sur $[0,1]$, segment inclus dans le disque ouvert de convergence, on obtient : $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{2n}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$.

On a bien $\boxed{I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}.}$

Q2. On applique le critère des séries alternées :

- pour tout n, $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}$ est du signe de $(-1)^n$
- $\left(\left|\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!}\right|\right)$ est une suite décroissante
- $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

En notant r_n le reste d'ordre n de la série, on a donc $|I - s_n| = |r_n| \leqslant \left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(n+1)!}\right| = \dfrac{1}{(2n+3)(n+1)!}$

On a donc bien $\boxed{|I - s_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)(n+1)!}.}$

Q3.

```
def factorielle(n):
    if n <= 1:
        return 1
    return n*factorielle(n-1)
```

Q4.

```
N = 1
while (2*N+3)*factorielle(N+1) < 10**6:
    N=N+1
print(N)
```

(on trouve N=8)

I.2 - Utilisation d'une autre suite de fonctions

Q5. Soit $x \in [0, +\infty[$, pour $n > x^2$ on a $1-\dfrac{x^2}{n} > 0$ et $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right)$

Or $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{n}$

donc $n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -x^2$ et $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-x^2}$

$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[\text{ vers } x \mapsto e^{-x^2}}$

Q6. En étudiant la fonction $t \mapsto \ln(1+t) - t$, on montre que pour tout $t > -1$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc, compte tenu de la croissance de l'exponentielle :

$0 \leq f_n(x) = \exp\left(n \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n\left(-\dfrac{x^2}{n}\right)\right) = e^{-x^2}$.

d'où $\boxed{|f_n(x)| \leqslant e^{-x^2}.}$

En utilisant le binôme de Newton :

$f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^{2k}}{n^k}$

On intègre entre 0 et 1 :

$\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{n^k} \int_0^1 x^{2k}\, dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(2k+1)n^k}.$

On utilise ensuite le théorème de convergence dominée pour montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$

- (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$
- la suite (f_n) converge simplement sur [0,1] vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ qui est continue sur $[0, 1]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0, 1]$, $|f_n(x)| \leqslant f(x)$ et f est positive, continue et donc intégrable sur $[0, 1]$.

On a donc bien $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$ et finalement,

$$\boxed{I = \int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n^k(2k+1)}.}$$

Fin