

Travaillez ce qui est marqué

La solution est en bas

Systèmes Linéaires. Rang et Inverse de Matrices

Exercice 1

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée.

- i) Calculer $\text{rg}(M)$.
- ii) Chercher $\ker(f)$ et en préciser une base.
- iii) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en préciser une base.

2) Répondre aux questions de 1) dans chacun des cas suivants :

i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

ii) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

iii) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

iv) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Calculer $\text{rg}(f)$ dans chacun des cas suivants, puis dire si f est surjective, injective, bijective. (Justifier vos réponses)

1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (-x + y + z, x - y + z, x + y - z) \end{cases}$

2) $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(0), P(1), P'(2)) \end{cases}$

3) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, 2x - y, x + y) \end{cases}$

4) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (-x + y + z, x - y + z) \end{cases}$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer $\text{rg}(B)$, le rang de la famille B et dire si B est une base de E .

- 1) $E = \mathbb{R}^3$. $B = (u, v, w)$ où $\begin{cases} u &= (1, 1, 2) \\ v &= (1, 2, 1) \\ w &= (2, 1, 1) \end{cases}$
- 2) $E = \mathbb{R}_2[X]$. $B = (P_1, P_2, P_3)$ où $\begin{cases} P_1 &= (X+1)^2 \\ P_2 &= (X-1)^2 \\ P_3 &= 1+X+X^2 \end{cases}$

Exercice 4

Posons $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

- 1) Calculer $\text{rg}(A_\alpha)$.
- 2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

Exercice 5

Considérons le système homogène suivant :

$$(H) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 &= 0 \end{cases}$$

Notons S_H l'espace des solutions de (H).

- 1) Calculer $\dim(S_H)$
- 2) Chercher une base de S_H .

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, calculer l'inverse A^{-1} sous réserve d'existence :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 7

Résoudre les systèmes homogènes suivants, et préciser pour chacun une base de l'espace des solutions.

1) $(H_1) : \begin{cases} 2x + 4y - 4z &= 0 \\ 3x + 9y - 6z &= 0 \\ 4x + 17y - 11z &= 0 \end{cases}$

2) $(H_2) : \begin{cases} -x + 6y - z &= 0 \\ 2x - 5y + 3z &= 0 \end{cases}$

$$3) (H_3) : \begin{cases} x + y - z + t &= 0 \\ 2x - y + 3z - t &= 0 \end{cases}$$

Exercice 8

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ Déterminer } \ker(A - I_3) \text{ et } \ker(A + I_3).$$

Préciser pour chacun une base.

$$2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\ker(B - I_3)$ et en préciser une base.

$$3) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\ker(C - I_3)$ et en préciser une base.

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée.

- i) Calculer $\text{rg}(M)$.
- ii) Chercher $\ker(f)$ et en préciser une base.
- iii) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en préciser une base.

i) Calculer $\text{rg}(M)$.

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ le pivot doit être non nul

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{pivot non nul} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 2^{\text{ème}} \text{ pivot non nul} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$= 3$: qui est le nombre de pivots non nuls

ii) Chercher $\ker(f)$ et en préciser une base.

f l'endomorphisme canoniquement associé à M .

Alors $\begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \text{mat}_B(f) = M \text{ ; où } B = (e_1, e_2, e_3) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$\ker(f) = ?$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ $\rightarrow$ On passe matriciellement

$$\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ y = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ z = -z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = -z \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Enfin :

$$\ker(f) = \{ (0, 0, 0) \}$$

n'a pas de base.

Méthode 2

On a $\text{rg}(M) = 3$ alors M inversible

D'où f est aussi inversible

$$\Rightarrow \begin{cases} \ker(f) = \{ (0, 0, 0) \}, \text{ n'a pas de base.} \\ \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \text{ ayant la base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ comme base.} \end{cases}$$

iii) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en préciser une base.

Voir ii).

2) Répondre aux questions de 1) dans chacun des cas suivants :

i) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

i) Calculer $\text{rg}(M)$.

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

→ 1^{er} pivot (non nul)

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

→ 2^{ème} pivot (non nul)

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

La matrice est échelonnée.

Le nombre de pivots non nuls obtenus est égal à 2.

D'où :

$$\text{rg}(M) = 2$$

□

ii) Chercher $\ker(f)$ et en préciser une base.

f l'endomorphisme canoniquement associé à M .

$$\text{Avec } \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \text{mat}_B(f) = M ; \text{ où } B = (e_1, e_2, e_3) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$\underline{\ker(f) = ?}$$

Let $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x = z \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = -4z \\ x = z \\ 2y = -4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (z, -2z, z)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = z \cdot (1, -2, 1)$$

$$(x, y, z) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{vect}((1, -2, 1))$$

$$\ker(f) = \text{Vect}((1, -2, 1))$$

$((1, -2, 1))$ en est une base



iii) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en préciser une base.

On a $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ (car $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 2$).

Déterminons deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}(f)$, alors ils vont constituer une base de $\text{Im}(f)$.

$$\text{On a : } \underset{B}{\text{mat}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

où $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$\text{et on a } \begin{cases} f(e_1) = (1, -1, 1) \in \text{Im}(f) \\ f(e_2) = (2, 0, 2) \in \text{Im}(f) \end{cases}$$

et que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont clairement pas colinéaires.

D'où $((1, -1, 1); (2, 0, 2))$ est une base de $\text{Im}(f)$



Remarque : On peut prendre $(1, 0, 1)$ à la place de $(2, 0, 2)$

$$\text{iii) } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

i) Calculer $\text{rg}(M)$.

$$\text{rg}(M) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Vous pouvez appliquer la méthode de Gauss si vous voulez.
Mais c'est plus rapide que ça.

Le rang de M est égal à celui de ses lignes.

La ligne L_1 et la ligne L_2 sont colinéaires ($L_2 = 2L_1$)

$$\text{Donc } \text{rg}(M) = \text{rg}(1 \ -1 \ 2 \ -2)$$

$$= 1$$



ii) Chercher $\ker(f)$ et en préciser une base.

f l'application linéaire canoniquement associée à M .

$$\text{Avec } \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2) \\ \text{mat}(f)_{B, B'} = M ; \text{ où } \begin{cases} B = (e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4 \\ B' = (e'_1, e'_2) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{\ker(f) = ?}$$

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$(x, y, z, t) \in \ker(f) \Leftrightarrow f(x, y, z, t) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z - 2t = 0 \\ 2x - 2y + 4z - 4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - y + 2z - 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y - 2z + 2t$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (y - 2z + 2t, y, z, t)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = y(1, 1, 0, 0) + z(-2, 0, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1)$$

$$(x, y, z, t) \in \ker(f) \Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect} \left((1, 1, 0, 0); (-2, 0, 1, 0); (2, 0, 0, 1) \right)$$

Donc :

$$\ker(f) = \text{Vect} \left((1, 1, 0, 0); (-2, 0, 1, 0); (2, 0, 0, 1) \right)$$

□

iii) Déterminer $\text{Im}(f)$ et en préciser une base.

On a $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ (car $\text{rg}(f) = \text{rg}(M) = 1$).

Prendons alors un vecteur non nul de $\text{Im}(f)$; il va en former une base.

$$\text{On a : } \underset{B, B'}{\text{mat}(f)} = M = \begin{matrix} & \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & f(e_4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ainsi $f(e_2) = (1, 2) \in \text{Im}(f) \setminus \{0\}$

D'où :

$\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 2))$
et $(1, 2)$ est une base de $\text{Im}(f)$

□

Exercice 2

Calculer $\text{rg}(f)$ dans chacun des cas suivants, puis dire si f est surjective, injective, bijective. (Justifier vos réponses)

$$3) f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x - y, 2x - y, x + y) \end{cases}$$

i) $\text{rg}(f) = ?$

$$\text{rg}(f) = \text{rg} \left(\begin{matrix} \text{mat}(f) \\ B_2, B_2 \end{matrix} \right), \text{ où } \begin{cases} B_1 \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^2 \\ B_2 \text{ " " " " } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 2$, c'est le rang des deux colonnes, qui ne sont pas linéaires.

ii) f est-elle surjective?

On a $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, alors :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3 \text{ (l'espace d'arrivée)}$$

$$\Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 3 \text{ (} \dim(\mathbb{R}^3) = 3 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \text{rg}(f) = 3$$

Or $\text{rg}(f) = 2$, alors f n'est pas surjective.

iii) f est-elle injective?

$$\text{On } f \text{ injective} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$$

est une application linéaire d'après le théorème du rang appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$:

$$\overset{\text{direct}}{\dim(\mathbb{R}^2)} = \underbrace{\dim(\ker f)}_{=2} + \underbrace{\operatorname{rg}(f)}_{=2}$$

$$\text{Donc } \dim(\ker f) = 0$$

$$\Rightarrow \ker f = \{0\}$$

Enfin f est injective

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer $\operatorname{rg}(B)$, le rang de la famille B et dire si B est une base de E .

$$2) E = \mathbb{R}_2[X]. B = (P_1, P_2, P_3) \text{ où } \begin{cases} P_1 = (X+1)^2 \\ P_2 = (X-1)^2 \\ P_3 = 1+X+X^2 \end{cases}$$

$$\sim) \operatorname{rg}(B) = ?$$

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg} \left(\operatorname{mat}_{B_c}(B) \right); \text{ où } B_c = (1, X, X^2) \text{ la base canonique de } \mathbb{R}_2[X].$$

$$= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ car } B = (P_1, P_2, P_3) \text{ et } \begin{cases} P_1 = 1+2X+X^2 \\ P_2 = 1-2X+X^2 \\ P_3 = 1+X+X^2 \end{cases}$$

On peut appliquer la méthode standard du pivot de Gauss.

Mais il s'avère qu'on peut faire plus rapidement, en remarquant que les lignes L_1 et L_3 sont égales.

Ainsi :

$\text{rg}(B) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; le rang d'une matrice est égal à celui de ses lignes.

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$= 2$, car les deux lignes ne sont pas colinéaires.

ii) B est-elle une base de $\mathbb{R}_2[x]$?

$$\text{On a } \text{card}(B) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[x])$$

Alors :

$$B \text{ base de } \mathbb{R}_2[x] \Leftrightarrow \text{rg}(B) = 3$$

Or $\text{rg}(B) = 2$, alors B n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[x]$.



Exercice 4

Posons $A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Calculer $\text{rg}(A_\alpha)$.

2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

1) Calculer $\text{rg}(A_\alpha)$.

$$\text{rg}(A_\alpha) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{0} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \text{pivot nul}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \text{le pivot est maintenant non nul}$$

$$\text{rg}(A_\alpha) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 1^{\text{er}} \text{ pivot non nul} \\ \rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ pivot non nul} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

Cas 1: Si $\alpha \neq 1$

$$\text{rg}(A_\alpha) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \rightarrow 1^{\text{er}} \text{ pivot non nul} \\ \rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ pivot non nul} \\ \rightarrow 3^{\text{ème}} \text{ pivot non nul} \end{array}$$

$= 3$; il y a trois pivots non nuls.

Cas 2 : Si $\alpha = 1$

$$\text{rg}(A_\alpha) = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{1}^{\text{er}} \text{ pivot non nul}} \\ \xrightarrow{\text{2}^{\text{ème}} \text{ pivot non nul}} \end{array}$$

$= 2$; il y a deux pivots non nuls.

□

2) Calculer A_α^{-1} quand A_α est inversible.

Si $\alpha \neq 1$, on a $\text{rg}(A_\alpha) = 3$ et $A_\alpha \in M_3(\mathbb{R})$
Alors A_α inversible.

Mais si $\alpha = 1$, $\text{rg}(A_1) = 2 \neq 3$, donc A_1 n'est pas inversible.

Supp que $\alpha \neq 1$.

Déterminer A_α^{-1} :

Faisons via la méthode de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{0} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha-1) & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & (\alpha-1) & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha-1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow (\alpha-1)L_2 - L_3 \\ L_2 \leftarrow (\alpha-1)L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} (\alpha-1) & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{(\alpha-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{\alpha-1} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{\alpha-1} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{\alpha-1} L_3 \end{array}$$

$\rightarrow I_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & -1 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow (A_\alpha)^{-1}$

$$(A_\alpha)^{-1} = \frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} -(\alpha-1) & \alpha-1 & 0 \\ (\alpha-1) & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Méthode 2 : (Méthode de Cramer)

$$A_d^{-1} = \frac{1}{\det(A_d)} \cdot {}^t \text{Cm}(A_d)$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A_d) = (0 + 1 + 1) - (1 + 0 + d) = (1 - d)$$

$$\text{Cm}(A_d) = \begin{pmatrix} d-1 & -(d-1) & 0 \\ -(d-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t \text{Cm}(A_d) = \begin{pmatrix} d-1 & -(d-1) & 0 \\ -(d-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_d^{-1} = \frac{1}{\det(A_d)} \cdot {}^t \text{Cm}(A_d) = \frac{1}{1-d} \cdot \begin{pmatrix} d-1 & -(d-1) & 0 \\ -(d-1) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$



Exercice 5

Considérons le système homogène suivant :

$$(H) : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Notons S_H l'espace des solutions de (H).

1) Calculer $\dim(S_H)$

2) Chercher une base de S_H .

1) Calculer $\dim(S_H)$

$\dim(S_H) = n - r$, où $\begin{cases} n = 5 : \text{le nombre d'inconnues} \\ r : \text{le rang du système ; c'est le rang de la matrice} \end{cases}$

$$r = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (\text{échelonnons la matrice})$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$$

$r = 3$ (Matrice échelonnée, avec 3 pivots non nuls.)

$$\dim(S_H) = 2$$



2) Chercher une base de S_H .

Pour $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. On a :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_H \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

On échelonne ce système, exactement comme on vient d'échelonner sa matrice. On obtient :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_H \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ -12x_4 = 0 \end{cases}$$

$\langle\langle x_1, x_2, x_4 : \text{les inconnues principales ; celles des pivots non nuls} \rangle\rangle$

$\langle\langle x_3, x_5 : \text{les inconnues secondaires} \rangle\rangle$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ -12x_4 = 0 \end{cases}$$

matrice échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$

On résout ce système triangulaire supérieur, d'inconnues x_1, x_2, x_4 , par remontée :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_H \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_3 + 3x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, 0, x_5)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_3(3, -1, 1, 0, 0) + x_5(3, -2, 0, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \text{Vect} \left((3, -1, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 0, 1) \right)$$

Enfin :

$$S_H = \text{Vect} \left((3, -1, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 0, 1) \right)$$

$$\left((3, -1, 1, 0, 0), (3, -2, 0, 0, 1) \right) \text{ est une base de } S_H.$$

Fin

Exercice 7

Résoudre les systèmes homogènes suivants, et préciser pour chacun une base de l'espace des solutions.

$$3) (H_3) : \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x - y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

Notons S_3 : l'espace des solutions de (H_3) .

$$(x, y, z, t) \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x - y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ -3y + 5z - 3t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

x, y : inconnues principales ; on garde à gauche

z, t : inconnues secondaires, on déplace vers l'autre côté.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = z - t \\ -3y = -5z + 3t \end{cases}$$

Système triangulaire supérieur d'inconnues x, y les inconnues principales : On le résout par remontée.

$$(x, y, z, t) \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{5}{3}z - t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = \left(-\frac{2}{3}z, \frac{5}{3}z - t, z, t \right)$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, t) = z \left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0 \right) + t (0, -1, 0, 1)$$

$$(x, y, z, t) \in S_3 \Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \text{Vect} \left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0 \right); (0, -1, 0, 1) \right)$$

$$S_3 = \text{vect} \left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0 \right); (0, -1, 0, 1) \right)$$

$\left(\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0 \right); (0, -1, 0, 1) \right)$ en est une base



Exercice 8

$$2) B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer $\ker(B - I_3)$ et en préciser une base.

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B - I_3) \Leftrightarrow (B - I_3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{équations} \\ \text{identiques} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(B - I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\ker(B - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base.



FIN