

Ce qui est marqué en jaune est corrigé à présent.  
Je corrigerai le reste après.

## Suites et séries de fonctions

### Exercice 1:

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in ]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 1}$  sur  $[0; 1]$ .

### Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $[0; +\infty[$ .
- b) Étudier la convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .
- c) Étudier la convergence uniforme sur  $[0; +\infty[$ .

### Exercice 3:

Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

- a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .
- b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$ ?

- c) Étudier la convergence uniforme sur  $[a; 1]$  avec  $a > 0$ .

### Exercice 4:

Pour  $x > 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- a) Justifier que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- b) Préciser le sens de variation de  $S$ .
- c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

- d) Donner un équivalent de  $S$  en 0.
- e) Donner un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

### Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur  $\mathbb{R}_+$ .

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

### Exercice 6:

On note  $1_I$  la fonction caractéristique d'un intervalle  $I$  :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur  $[0; +\infty[$  de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1]}(x)$$

### Exercice 7:

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive et décroissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0; 1]$$

- Montrer la convergence simple de la série de fonctions  $\sum u_n$ .
- Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série  $\sum a_n/n$ .
- Montrer que la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément si, et seulement si,  $a_n \rightarrow 0$ .

### Exercice 8:

Considérons la fameuse fonction *zéta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- Montrer que  $\zeta$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .
- Etudier la monotonie et la convexité de  $\zeta$ .
- Déterminer la limite de  $\zeta$  en  $+\infty$ .
- Déterminer la limite de  $\zeta$  en 1.
  - Déterminer un équivalent simple de  $\zeta$  en 1.
  - Tracer l'allure de la courbe de  $\zeta$ .
- Montrer que la fonction  $x \mapsto \ln(\zeta(x))$  est convexe sur  $]1, +\infty[$ .  
*Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

### Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction  $\zeta_2$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 10:**

Soit

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, et calculer-la.

$$\int_0^1 \psi(x) dx$$

**Exercice 11:**

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in ]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des  $u_n$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

**Exercice 12:**

Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\alpha\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en  $+\infty$  et un équivalent en  $0^+$ .**Exercice 13:**Pour  $t > 0$ , on pose  $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$ Déterminer la limite de  $S(t)$  quand  $t \rightarrow 0^+$ .**Exercice 14:**

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha\sqrt{n}}$$

a) Quel est le domaine de définition de  $f$ ?  
Étudier la continuité de  $f$  sur celui-ci.

- b) Montrer que  $f$  est strictement décroissante.
- c) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- d) Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

**Exercice 15:**

Pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

- a) Justifier que la fonction  $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- b) Établir que pour tout  $x \neq 0$ ,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- c) Établir que  $f$  est continue sur  $] -1 ; 1 [$  puis que  $f$  est continue sur  $] -\infty ; -1 [$  et  $] 1 ; +\infty [$ .
- d) Établir la continuité de  $f$  en 1.

**Exercice 16:**

Soit  $\alpha$  un réel. Pour tout entier  $n > 0$  et tout réel  $x$ , on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$$

On note  $I$  le domaine de définition de

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

- a) Déterminer  $I$ .
- b) Montrer que  $S$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- c) A-t-on convergence normale sur  $\mathbb{R}_+$  ?
- d) On suppose  $\alpha \geq 2$ . Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La convergence de la série de fonctions  $\sum u_n$  est-elle uniforme sur  $I$  ?

- e) Étudier la continuité de  $S$  sur  $I$ .

**Exercice 17:**

On suppose  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $|t| < 1/\|A\|$ , on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k$$

- a) Montrer que  $f$  est bien définie et que  $f(t) = (I - tA)^{-1}$ .
- b) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $f'(t) = A(I - tA)^{-2}$ .

**Exercice 18:**

On suppose  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  muni d'une norme notée  $\|\cdot\|$  vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Pour  $|t| < 1/\|A\|$  on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k$$

- a) Montrer que  $f$  est bien définie.
- b) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que

$$(I - tA)f'(t) = A$$

Fin

# CORRECTION

CORRECTION

# CORRECTION

## Exercice 1:

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in ]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(u_n)_{n \geq 1}$  sur  $[0; 1]$ .

Solution

D'abord, si  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers une fonction  $f$  sur  $[0, 1]$ , alors elle converge simplement vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .

Cherchons d'abord la fonction  $f$ , sa limite simple.

Explications  $f(x)$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ .

Soit  $x \in [0, 1]$ . On a  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$

1) Si  $x \in ]0, 1]$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= x^n \ln x \text{ si } x \in ]0, 1] \\ \lim_n u_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

On a ( $\forall n \geq 1$ ,  $u_n(x) = x^n \ln x$ )

D'où  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln(x)$

a) Si  $x \in ]0, 1[$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \infty$  si  $-1 < q < 1$

Rappel

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln(x)$$

$$= 0 \quad \left( \text{car } 0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \right)$$

$\mathcal{D}'$  ou

$$\forall x \in [0,1], f(x) = 0$$

b) Si  $x = 1$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(1)$$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in ]0,1]$$

$$\lim_n (0) = 0$$

$$f(1) = 0 \quad (\text{car } (\forall n \geq 1, U_n(1) = 0))$$

2) Si  $x = 0$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(0)$$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in ]0,1]$$

$$\lim_n (0) = 0$$

$$f(0) = 0 \quad (\text{car } (\forall n \geq 1, U_n(0) = 0))$$

Enfin :

$$\forall x \in [0,1], f(x) = 0$$

La suite de fonctions  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge simplement vers 0 sur  $[0,1]$ .

Étudions si  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0,1]$ .

Il suffit de montrer l'existence d'une suite  $(d_n)_n$  vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], |U_n(x) - 0| \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{array} \right.$$

Cad :  $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |U_n(x)| \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{array} \right.$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in ]0, 1] \\ U_n(0) = 0$$

Cad :  $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \forall x \in ]0, 1], |x^n \ln x| \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{array} \right.$

Cad :  $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \forall x \in ]0, 1], -x^n \ln x \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{array} \right.$

Soit  $n \geq 1$ .

Considérons la fonction  $g : x \mapsto -x^n \ln x$ , pour tout  $x \in ]0, 1]$ .

$g$  est dérivable sur  $]0, 1]$ , et on a :

$$(\forall x \in ]0, 1], g'(x) = -x^{n-1}(1+n \cdot \ln x))$$

On a :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1+n \cdot \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1+n \cdot \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{n}}$$

D'où le tableau de variation suivant :

$x$	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	1
$g'(x)$	+	0	-
$g$		$g(e^{-\frac{1}{n}}) = \frac{1}{ne}$	

2)  $\frac{1}{n}x^n$  :

$\left\{ \begin{array}{l} f_n \geq 1, \forall x \in [0, 1], g(x) = -x^n \ln x \leq \frac{1}{n}x \end{array} \right.$

et on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}x = 0$

Enfin :  $(U_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

Fin Exercice 1

## Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $[0; +\infty[$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[0; +\infty[$ .

Solution

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $[0; +\infty[$ .

**Solution**

Notons  $U$  la limite simple de la suite de fonctions  $(U_n)_n$  sur  $[0; +\infty[$ .

Déterminons  $U$ .

Soit  $x \in [0; +\infty[$ .  $U(x) = ?$

On a :

$$\begin{aligned} U(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x) \\ \text{par déf} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} \sin(nx) \end{aligned}$$

On sait que  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = 0$  si  $x > 0$ .

Si  $x \in ]0; +\infty[$ :

$$\begin{aligned} U(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} \sin(nx) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{sinx bornée} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si  $\gamma = 0$

$$U(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \cdot 0} \underbrace{\sin(0)}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow = 0, \text{ pour tout } n.$

Alors :

$$\forall x \in [0, +\infty[, U(x) = 0$$

La suite de fonctions  $(U_n)_n$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $[0, +\infty[$ .



On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $[0; +\infty[$ .  
b) Étudier la convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .

## Solution

a) On avait montré que  $(U_n)$  converge vers 0 sur  $[0; +\infty[$ .

b) Soit  $a > 0$ .

La suite de fonctions  $(U_n)$  converge-t-elle uniformément vers 0 sur  $[a, +\infty[$  ?

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [a, +\infty[$ .

$$|U_n(x) - 0| \leq ?$$

où  $d_n$  ne dépend pas de  $x$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0$

On a :

$$|U_n(x) - 0| = |e^{-nx} \sin(nx)|$$

$$\leq e^{-na} \quad (\text{car } |\sin(nx)| \leq 1)$$

$$\leq e^{-na} \quad (\text{car } x \geq a)$$

Ainsi :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in [a, +\infty[$ ,  $|U_n(x) - 0| \leq e^{-na}$

C'est  $d_n$ , et  $n$  dépend pas de  $x$

Et on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-na} = 0$

D'où

$(U_n)$  converge unif vers 0 sur  $[a, +\infty[$



On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions  $(u_n)$  sur  $[0; +\infty[$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[a; +\infty[$  avec  $a > 0$ .
- Étudier la convergence uniforme sur  $[0; +\infty[$ .

## Solution

À-t-on la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(U_n)$  sur  $[0, +\infty[$  ?

Càd : À-t-on que  $\|U_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  ?

Càd :  $\left( \begin{array}{l} \text{À-t-on que } \sup_{x \in [0, +\infty[} |e^{-nx} \sin(nx)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \\ \end{array} \right)$

Soit  $n \geq 1$ . On a :

$$\|U_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |e^{-nx} \sin(nx)| \geq \left| e^{-n \times \frac{1}{n}} \sin\left(n \times \frac{1}{n}\right) \right| = e^{-1} \sin(1).$$

D'où :  $\left( \forall n \geq 1, \|U_n\|_\infty \geq e^{-1} \sin(1) > 0 \right)$

Alors  $\|U_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

Enfin : La suite de fonctions  $(U_n)_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, +\infty[$ .

Fin Exercice 2

### Exercice 3:

Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^2x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$  ?

c) Étudier la convergence uniforme sur  $[a; 1]$  avec  $a > 0$ .

Solution

Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^2x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .

**Solution**

Notons  $f$  la limite simple de la suite de fonctions  $(f_n)_n$  sur  $[0, 1]$ .

Déterminons  $f$ .

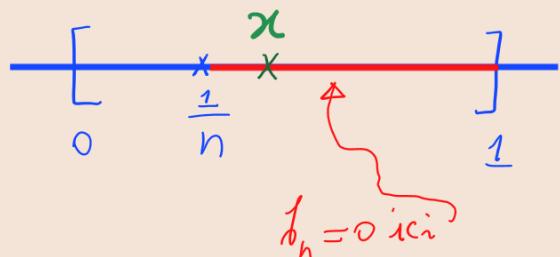
Soit  $x \in [0, 1]$ .  $f(x) = ?$

On a :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

par déf

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1 - nx) & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



Si  $0 < x < 1$

D'ori  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Alors  $(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} < x)$

Or  $f_n = 0$  sur  $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$

Alors  $f_n(x) = 0$ , pour tout  $n \geq N$

D'ori  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

Par suite  $f(x) = 0$  si  $0 < x < 1$ .

Si  $x = 0$

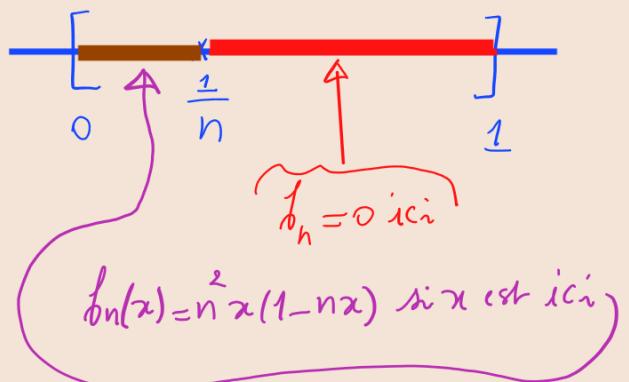
$f(0) = ?$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0)$$

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, f_n(0) = n^2 \cdot 0 \times (1 - n \cdot 0) = 0 \\ \text{Car } 0 \leq 0 \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

D'ori  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x (1 - nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(0) = 0$$

On fin,

$$f=0 \text{ sur } [0,1]$$

---

Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^2x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$  ?

## Solution

---

b)i) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t) dt &= \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx \quad \left( \text{car } \forall x \in [\frac{1}{n}, 1], f_n(x) = 0 \right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x(1 - nx) dx \\ &= \frac{1}{6} \quad (\text{après calcul}). \end{aligned}$$

---

b)ii) Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$  ?

La réponse est **non** ; en effet.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que la suite de fonctions  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . (vers 0 ; sa limite simple).

Or : ( $\forall n \geq 1$ ,  $f_n$  est continue sur  $[0, 1]$ )

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 f_n(t) dt \right) = \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt$$

$\Rightarrow = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow = 0$

Alors  $\frac{1}{6} = 0$  Ce qui est absurde



Soit  $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = n^2x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite  $(f_n)$ .

b) Calculer

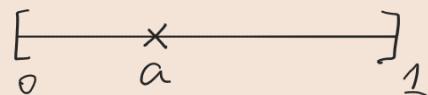
$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)$ ?

c) Étudier la convergence uniforme sur  $[a; 1]$  avec  $a > 0$ .

## Solution

Soit  $a > 0$ .



$(f_n)_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, 1]$ ?

On sait que  $(f_n)$  conv. simplement vers 0 sur  $[0, 1]$ .

Alors il s'agit de voir si  $\|f_n - 0\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  ou non.

On a :  $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x)|$ , et  $f_n = 0$  sur  $\left] \frac{1}{n}, 1 \right]$

Or  $\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \right)$  alors :  $(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} < a)$

$\Rightarrow (\forall n \geq N, 0 < \frac{1}{n} < a \leq 1)$

Et puisque  $(f_n = 0 \text{ sur } \left] \frac{1}{n}, 1 \right])$

Alors :  $(\forall x \in [a, 1], f_n(x) = 0)$ , pour tout  $n \geq N$ .

Ainsi :  $\left( \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x)| = 0 \right)$

D'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$

C'est à dire que  $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $[a,1]$  (vers 0)

Fin Exercice 3

## Exercice 4:

Pour  $x > 0$ , on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- a) Justifier que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- b) Préciser le sens de variation de  $S$ .
- c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

- d) Donner un équivalent de  $S$  en 0.
- e) Donner un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

Solution

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x); \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- a) Justifier que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

a) i) Montrer que  $S$  est définie sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . Montrer que  $S(x)$  existe.

On a :

$$S(x) \text{ existe} \iff \text{La somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ existe}$$

$$\iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ converge}$$

Ce qui est vrai car C'est une série alternée et que la suite  $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \geq 0}$  est décroissante de limite nulle.

D'où  $S(x)$  existe. □

a) ii) Montrer  $S$  est de Classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x); \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Pour montrer que  $S$  est de Classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , il suffit de vérifier les points suivants :

- || a)  $\forall n \geq 0, f_n$  est de Classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$
- || b) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  est sur  $]0, +\infty[$ .
- || c) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f'_n$  est sur tout  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$

Part 2)

$\forall n \geq 0, f_n$  est de Classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , par opérations sur les fonctions de Classes  $C^1$ .

## Pour $\beta$ )

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} f_n$  sur  $]0, +\infty[$  ça veut dire que :

$(\forall x \in ]0, +\infty[, \text{ la série numérique } \sum_{n \geq 0} f_n(x) \text{ converge})$

Ce qu'on avait montré en a)i).

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

## Pour $\delta$ )

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  C.U sur tout  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$  ?

Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Montrons que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  C.U sur  $[a, b]$ .

Il suffit de montrer la convergence normale sur  $[a, b]$ .

Soient alors  $n \geq 0$  et  $x \in [a, b]$ .

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \right|$$

S' il existe une suite  $(\alpha_n)_n$  telle que

$$\left( \begin{array}{l} 1) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ 2) \sum_n \alpha_n \text{ converge} \end{array} \right)$$

Alors La série de fonctions  $\sum_n f_n$  converge normalement sur X.

→ Rappel

$$= \frac{1}{(n+x)^2}$$

$$\leq \frac{1}{(n+a)^2} \quad (\text{car } (n+x)^2 \geq (n+a)^2 \text{ si } (x \geq a))$$

Or  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)^2}$  converge car  $\frac{1}{(n+a)^2} \sim \frac{1}{n^2}$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge

Alors la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n'$  converge normalement sur  $[a, b]$ . □

Enfin

$S$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$

$$\forall x \in ]0, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$



b) Préciser le sens de variation de  $S$ .

$S$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et on a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Le signe de  $S'(t)$  est celui du premier terme de la somme

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}$ , soit  $\frac{(-1)^1}{t^2}$ , puisque c'est une série alternée

et que la suite  $\left(\frac{1}{(n+t)^2}\right)_{n \geq 0}$  est décroissante de limite nulle.

Dès :  $(\forall t \in ]0, +\infty[, S'(t) \leq 0)$

est donc  $S$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .



c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} ; \text{ pour tout } x > 0$$

Soit  $x > 0$ . On a :

$$\begin{aligned}
 & \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : \\
 S(x+1) + S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n+x} + \frac{(-1)^n}{n+1+x} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n+x} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} \right) \\
 &= \frac{(-1)^0}{0+x} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n+x} \right)}_{=0} \\
 &= \frac{1}{x} \quad \square
 \end{aligned}$$

$\sin(x_n)$  converges.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - x_{n+1}) = x_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

d) Donner un équivalent de  $S$  en 0.

$$\text{On a: } \left( \forall x > 0, S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \right)$$

eft on a  $\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1)$  car  $S$  continue en 1 point que  $S \in C^1([0, +\infty[ \cap \mathbb{R})$

$$\text{Get on a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{D'où } \left( \frac{1}{x} - S(x+1) \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}} \quad \square$$


---

e) Donner un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

$$\text{On a : } \left( \forall x > 0, S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \right)$$

et on a :

$$\forall x > 1, S(x+1) \leq S(x) \leq S(x-1)$$

Car  $S$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

$$\text{D'où : } \forall x > 1, \underbrace{S(x) + S(x+1)}_{= \frac{1}{x}} \leq 2S(x) \leq \underbrace{S(x-1) + S(x)}_{= \frac{1}{x-1}}$$

$$\Rightarrow \left( \forall x > 1, \frac{1}{x} \leq 2S(x) \leq \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \text{ alors } 2S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

Enfin :

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

**Fin Exercice 4**

## Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur  $\mathbb{R}_+$ .

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

### Solution

1) Étudions la convergence simple de la série de fonctions  $\sum_n f_n(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}^+$ .

La série numérique  $\sum_n f_n(x)$  converge-t-elle ?

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

Ça dépend, la série  $\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$  converge-t-elle ?

Cas 1 : Si  $x > 0$

On a  $n^2 x \left( nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  (par croissance comparée)

$$\text{D'où } nx^2 e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  converge, alors  $\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$  converge □

Cas 2 : Si  $x = 0$

$\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$  converge, car c'est la série nulle.

$\lim_{n \rightarrow \infty}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_n f_n(x) \text{ converge}$$

D'où la convergence simple de la série de fonctions  $\sum_n f_n(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .



2) Étudions la convergence normale de la série de fonctions  $\sum_n f_n(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

C'est, la série positive  $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$  converge ou diverge-t-elle ?

Soit  $n \geq 1$ .

$$\|f_n\|_\infty = ?$$

Soit  $n \geq 1$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (nx^2 e^{-x\sqrt{n}})$$

Or  $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ .

$f_n$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n \left( 2xe^{-x\sqrt{n}} + x^2 \cdot (-\sqrt{n}) e^{-x\sqrt{n}} \right) \\ &= nx e^{-x\sqrt{n}} (2 - \sqrt{n} \cdot x) \end{aligned}$$

$$f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow \left( x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow x(2 - \sqrt{n} \cdot x) > 0$$

D'où le tableau de variations suivant de la fonction  $f_n$ :

$$a = -\sqrt{n} < 0$$

$x$	0	$\frac{2}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	0	+	0
$f_n$		$4e^{-x^2}$	

$$f_n(x) = n x^2 e^{-x \sqrt{n}}$$

$$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = n \cdot \frac{4}{n} \cdot e^{-\frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}} = 4 e^{-2}$$

D'où  $(f_n)_{n \geq 1}$ ,  $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f_n(x)) = 4 e^{-2}$

Ainsi, la série  $\sum_n \|f_n\|_\infty$  diverge (grossièrement même), car  $\|f_n\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\not\rightarrow} 0$ .

D'où la série de fonctions  $\sum_n f_n(x)$  ne converge pas normalement sur  $\mathbb{R}^+$ .

□

3) Étudions la convergence uniforme de la série de fonctions  $\sum_n f_n(x)$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

On ne peut pas utiliser la convergence normale, puisqu'elle n'est pas réalisée.

On a :

$\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  si et seulement si les deux conditions

suivantes sont réalisées :

a)  $\sum_{n \geq 1} b_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^+$

b) La suite de fonctions  $(R_n(x))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $\mathbb{R}^+$

$$f_n : R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

a) est vérifiée .

Pour b) :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Soit  $n \geq 1$ .  
 $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$

Ainsi :  $(\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+, R_n(x) \geq f_{n+1}(x))$

$$\mathcal{D}'_{\text{fin}} \left( \forall n \geq 1, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} R_n(x) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left( f_{n+1}(x) \right) \right)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \|R_n\|_{\infty} \geq \|\delta_{n+1}\|_{\infty}$$

$\approx 4e^{-2}$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \|R_n\|_{\infty} > 4e^{-2} > 0$$

Par suite  $\|R_n\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ } 0$

D'où la suite de fonctions  $(R_n(x))_{n \geq 1}$  ne converge pas uniformément vers 0 sur  $\mathbb{R}^+$ .

Et enfin,  $\sum_{n \geq 1} b_n$  ne converge pas uniformément sur  $\mathbb{R}^+$ .



Fin Exercice 5

## Exercice 6:

On note  $1_I$  la fonction caractéristique d'un intervalle  $I$  :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur  $[0; +\infty[$  de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

1)

Soit  $x \in [0, +\infty[$ . (fixé).

La série numérique  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$  converge-t-elle ?

C'est, la suite réelle  $(S_n(x))_{n \geq 0}$  converge-t-elle ? où  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$ .

On a  $u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

On sait que  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

Notons  $n_0 = \lfloor x \rfloor$ . On a alors  $n_0 \leq x < n_0 + 1$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Alors  $\begin{cases} u_{n_0}(x) = \frac{1}{n_0+1} \\ \forall k \neq n_0, u_k(x) = 0 \end{cases}$

Par suite :  $\forall n \geq n_0, S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$

$$= \frac{1}{n_0+1}$$

On a ainsi :  $\left( \forall n \geq n_0, S_n(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{\lfloor x \rfloor + 1}$$

D'où la suite réelle  $(S_n(x))_{n \geq 0}$  converge.

Enfin :

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} v_n(x)$  converge simplement sur  $[0, +\infty[$ .



On note  $1_I$  la fonction caractéristique d'un intervalle  $I$  :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur  $[0; +\infty[$  de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

2)

Étudions la convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$  de  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ .

On a :

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) \text{ CL sur } [0, +\infty[ \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{a)} \sum_{n \geq 0} u_n(x) \text{ CS sur } [0, +\infty[ \\ \text{b)} (R_n(x))_{n \geq 0} \text{ CL vers } 0 \text{ sur } [0, +\infty[ \end{array} \right.$$

a)  $\sum_{n \geq 0} u_n(x) \text{ CS sur } [0, +\infty[$  est vérifiée.

Il suffit de vérifier que b)  $(R_n(x))_{n \geq 0} \text{ CL vers } 0 \text{ sur } [0, +\infty[$  est vérifiée :

C'est à dire  $\|R_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  ?

Soit  $n \in \mathbb{N}$  (fixé).

$$\forall x \in [0, +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

$$\text{On a : } u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0: x \in [0, n+1[ : R_n(x) = 0 \\ S_1: x \in [n+1, n+2[ : R_n(x) = \frac{1}{n+2} \\ S_n: x \in [n+2, n+3[ : R_n(x) = \frac{1}{n+3} \\ \vdots \end{array} \right.$$

D'où  $\|R_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, +\infty[} |R_n(x)| = \frac{1}{n+2}$ , et ce pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour finir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$

Enfin :

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$  converge uniformément sur  $[0, +\infty[$ . □

On note  $1_I$  la fonction caractéristique d'un intervalle  $I$  :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur  $[0; +\infty[$  de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

3) ——————

Étudions la convergence normale sur  $[0, +\infty[$  de  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ .

Càd, la série numérique  $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_\infty$  converge-t-elle ou non ?

Soit  $n \in \mathbb{N}$  (fixé).

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = ?$$

$$\text{On a } |u_n(x)| = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Donc : } (\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_\infty = \frac{1}{n+1})$$

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} \|U_n\|_\infty$  diverge

Enfin :

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$  ne converge pas normalement sur  $[0, +\infty[$ .

Fin Exercice 6

**Exercice 8 :**

Considérons la fameuse fonction zéta de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- 1) Montrer que  $\zeta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .
- 2) Etudier la monotonie et la convexité de  $\zeta$ .
- 3) Déterminer la limite de  $\zeta$  en  $+\infty$ .
- 4)
  - i) Déterminer la limite de  $\zeta$  en 1.
  - ii) Déterminer un équivalent simple de  $\zeta$  en 1.
  - iii) Tracer l'allure de la courbe de  $\zeta$ .
- 5) Montrer que la fonction  $x \mapsto \ln(\zeta(x))$  est convexe sur  $]1, +\infty[$ .  
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1) Posons  $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$ , pour tout  $n \geq 1$  et  $x \in ]1, +\infty[$ .

Pour montrer que  $f$  est d. classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ , il suffit de montrer que :

a)  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$  est d. classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

b)  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge sur  $]1, +\infty[$

c)  $\forall p > 1$ ,  $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$  converge sur tout segment  $[a, b] \subset ]1, +\infty[$ .

a) est claire

b) est claire aussi :  $\sum \frac{1}{n^x}$  converge pour tout  $x > 1$  (car c'est une série de Riemann).

c) Soit  $p > 1$ . Soit  $[a, b] \subset ]1, +\infty[$ . On a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [a, b], f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

$$\Rightarrow \left( \forall n \geq 1, \forall x \in [a, b], \left| f_n^{(p)}(x) \right| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a} \right)$$

Or  $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^p}{n^a}$  converge, car si on prend  $1 < \gamma < a$ , on

$$\text{aura } n^\gamma \cdot \frac{(\ln n)^p}{n^a} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{et donc } \frac{(\ln n)^p}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}\right)$$

et puisque  $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{8}}}$  converge (car  $\delta > 1$ )

$$\text{D'où } \sum \frac{(\ln n)^p}{n^a} \text{ converge.}$$

Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$  converge normalement, et donc converge uniformément sur  $[a, b]$ .

$f_n$  finie et de classe  $C^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ , donc :

$$\forall p > 1, \forall x \in ]1, +\infty[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

## 2) i) Monotonie de $f$

$f$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$$

D'où  $f$  est décroissante sur  $]1, +\infty[$ .

## 2) ii) Convexité de $f$

$f$  est 2 fois dérivable sur  $]1, +\infty[$ , et pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a :

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$$

D'où  $f$  est convexe sur  $]1, +\infty[$ .

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) ? = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

Pour pouvoir intervertir, il suffit de vérifier :

a)  $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = l_n \in \mathbb{R}$

b)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$  converge uniformément sur  $[2, +\infty[$ .

Pour a)

Soit  $n \geq 1$ .

Si  $n \geq 2$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x \ln(n)} = 0$$

Si  $n = 1$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1^x} = 1$$

Pour b)

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [2, +\infty[, \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et donc  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge ( $z > 1$ )

Donc  $\sum \frac{1}{n^x}$  CN, donc CU sur  $[2, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} \right) \end{aligned}$$

$$= \boxed{1} , \text{ car } l_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4) i) Déterminer la limite de  $\zeta$  en 1.

Soit  $x > 1$ .

$$\text{On a } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

$$\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$$

Car  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  est continue et décroissante sur  $[n, n+1]$ .

$$\text{D'où: } \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$$

ii) Déterminer un équivalent simple de  $\zeta(x)$  en 1.

Cle : On encadre  $\zeta(x)$  puis on tire  $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} ?$

Soit  $x > 1$ .

$$\text{On a } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On encadre d'abord  $\frac{1}{n^x}$ , puis on introduit la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty}$ :

$$\forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt$$

Car  $t \mapsto \frac{1}{t^x}$  est continue et décroissante sur  $[n-1, n]$  et sur  $[n, n+1]$ .

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt \right) \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

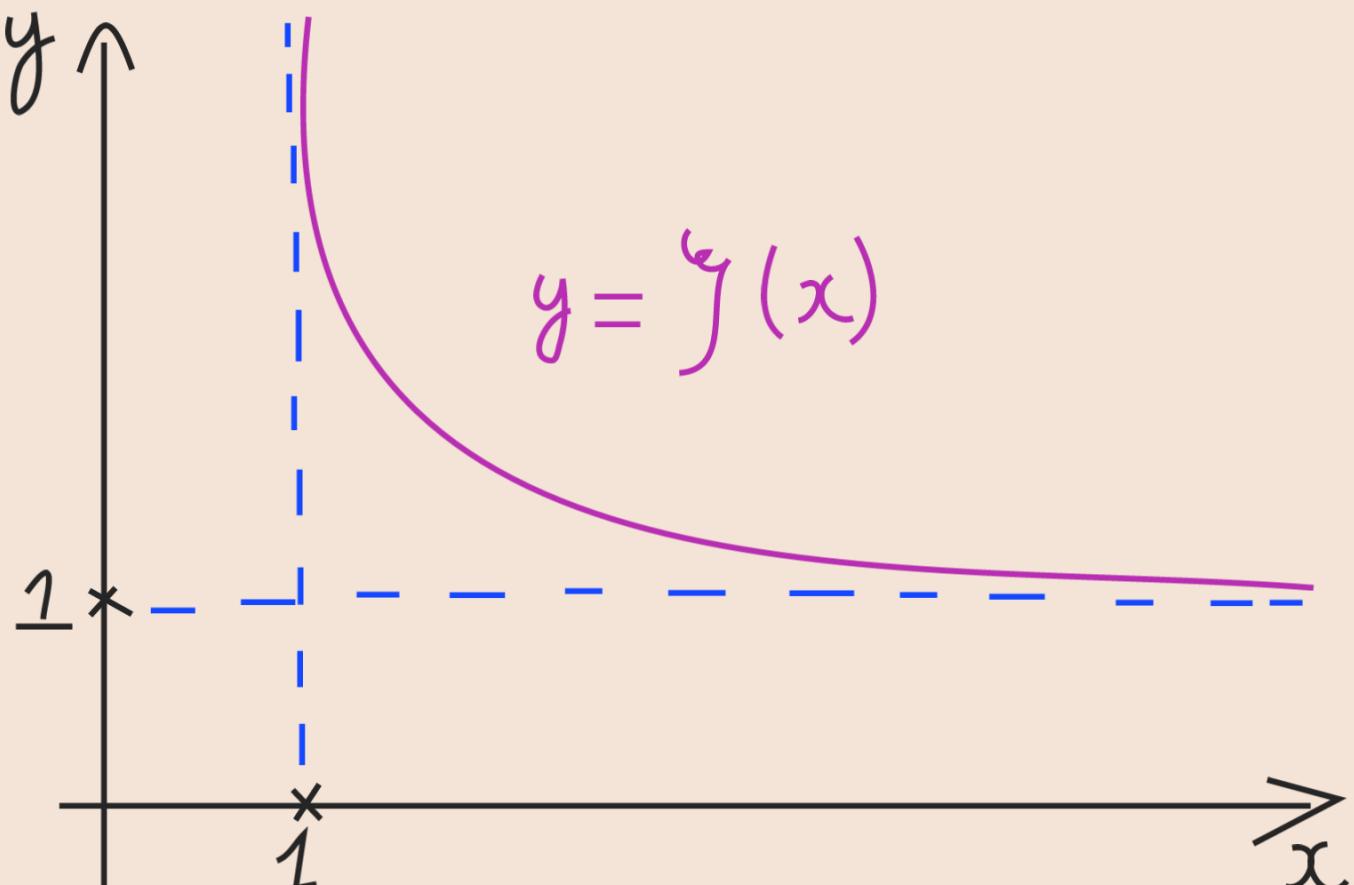
Soit :

$\forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$

Or  $\left( \frac{1}{x-1} + 1 \right) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$  Car  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

Alors  $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$

iii) Tracer l'allure de la courbe de  $\zeta$ .



5) Montrer que la fonction  $x \mapsto \ln(\zeta(x))$  est convexe sur  $[1, +\infty[$ .  
*Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Considérons la fonction  $h: x \mapsto \ln(\zeta(x))$ .

$h$  est bien deux fois dérivable sur  $[1, +\infty[$ , et on a :

$$\forall x \in [1, +\infty[, h''(x) = \frac{\zeta''(x) \zeta(x) - (\zeta'(x))^2}{(\zeta(x))^2}$$

Alors

$$(h \text{ est convexe sur } ]1, +\infty[) \Leftrightarrow (\forall x \in ]1, +\infty[, \{''(x)\}_{h=1} - \{y'(x)\}_{h=1}^2 \geq 0)$$

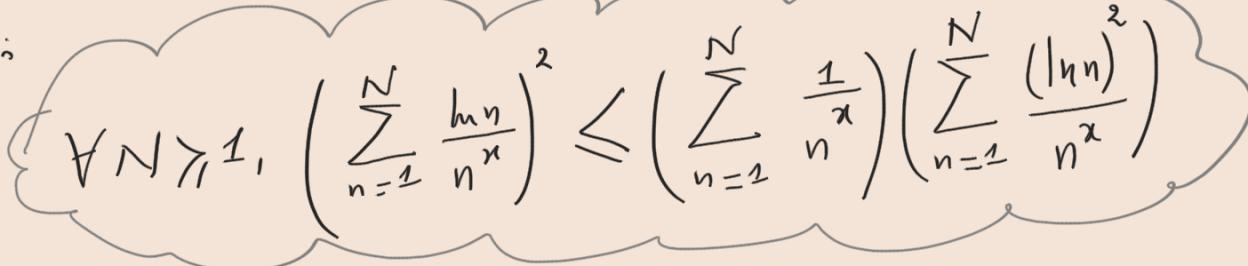
$$\Leftrightarrow (\forall x \in ]1, +\infty[, \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \right))$$

Soit  $x > 1$ . Soit  $N \geq 1$ . On a :

$$\left( \sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 = \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n^{\frac{x}{2}}} \right) \cdot \left( \frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}} \right) \right)^2$$

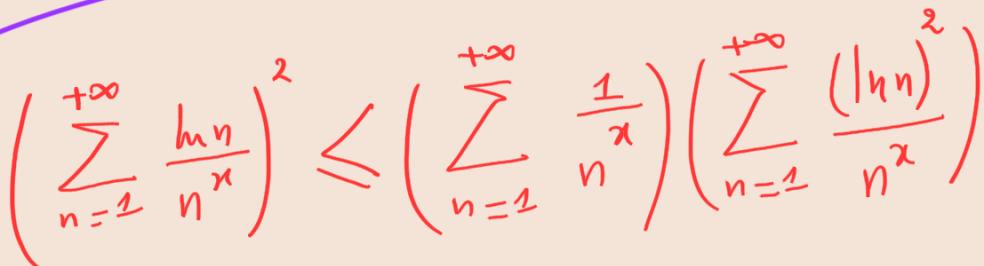
$$\leq \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n^{\frac{x}{2}}} \right)^2 \right) \times \left( \sum_{n=1}^N \left( \frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}} \right)^2 \right) \quad \begin{array}{l} \text{(d'après l'inégalité)} \\ \text{(de Cauchy-Schwarz)} \end{array}$$

Ainsi :



$$\forall N \geq 1, \left( \sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \right) \left( \sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^2}{n^x} \right)$$

Par passage à la limite  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient :



$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \right)$$

Fin Exercice 8

## Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction  $\zeta_2$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$ .

Solution

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1) Montrons que la fonction  $\zeta_2$  est définie sur  $]0, +\infty[$ :

Soit  $x \in ]0, +\infty[$ .

Il s'agit de montrer que  $\zeta_2(n)$ , c'est à dire  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ , existe.

C'est que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$  converge.

Ce qui est vrai, car C'est une série alternée, et que la suite

$\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$ , lorsque  $x > 0$ .

□

2) Montrons que la fonction  $\zeta_2$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

On a :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Soit  $n \geq 1$ .

$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , par

opérations sur les fonctions de class  $C^1$ .

b) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ , d'après 10).

c) Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n'$  converge uniformément sur  $[a, b]$ .

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

$$f_n'(x) = \left( \frac{(-1)^n}{n^x} \right)'$$

$$= (-1)^n \cdot (n^{-x})'$$

$$= (-1)^n \cdot (e^{-x \ln n})'$$

$$= (-1)^n \cdot (-\ln n) \cdot e^{-x \ln n}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$$

On veut montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

Converge uniformément sur  $[a, b]$ .

# Browillon

La Convergence normale n'aboutit pas.

On a :

$$\left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x} \right| = \frac{\ln n}{n^x}$$

$$0 < a < n < b$$

$$= \ln(n) \cdot n^{-x}$$

$$= \ln n \cdot e^{-x \ln n}$$

$$\leq \ln n \cdot e^{-a \ln n}$$

$$\hookrightarrow -x \leq -a$$

$$= \frac{\ln n}{n^a}$$

Mais  $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$  diverge si  $0 < a \leq 1$ , alors que  $0 < a$ .  
 Bertrand → Classique et Hors program

On veut montrer que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

Converge uniformément sur  $[a, b]$ .

i) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$  converge simplement sur  $[a, b]$ ?

Soit alors  $x \in [a, b]$ . La série numérique  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$  converge, en effet:

On a  $x > 0$ , alors la suite  $\left( \frac{\ln n}{n^x} \right)_n$  est décroissante et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^x} = 0$  par croissance comparée. Et on conclut alors le Critère de Leibniz pour les séries alternées.

ii) La suite de fonctions  $(R_n(x))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers 0 sur  $[a, b]$ ?

$$\text{ où } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^x} .$$

Soient  $n \geq 1$  et  $x \in [a, b]$ , on a :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^x} \right| \\ &\leq \left| (-1)^{n+2} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| \quad (\text{1er terme}) \\ &= \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \end{aligned}$$

Rappel

$0 < a \leq n \leq b$

$$|R_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \quad (n \neq \text{dépend pas de } x)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0 \quad (\text{par croissance comparée, vu que } a > 0)$$

D'où  $(R_n(x))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers 0 sur  $[a, b]$ .  $\square$

De ii) et iii) on conclut que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^2}$  converge uniformément sur  $[a, b]$ .

Enfin, la fonction  $\int_2^x$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

Fin Exercice 9

## Exercice 11:

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in ]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

- b) Montrer que la série des  $u_n$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .  
 c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Solution

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a :  $U_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) & \text{si } x \in ]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

Soit  $x \in [0, 1]$ . Calculons  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$ .

Cas 1 : Si  $x = 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0 \quad (\text{Car } \forall n \in \mathbb{N}, U_n(0) = 0)$$

Cas 2 : Si  $x \in ]0, 1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} h(n)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot (x^2)^{n+1} \cdot h(n)$$

$$= h(x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1}$$

$$= h(x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n$$

$$= h(x) \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{1 - (-x^2)}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \frac{-x^2 h(x)}{1 + x^2}$$

Cas 3 : Si  $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} 1^{2n+2} h(1) = 0$$

$$= 0$$

## Conclusion

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 \ln(x)}{1+x^2} & \text{Si } x \in ]0, 1] \\ 0 & \text{Si } x=0 \end{cases}$$

b) Montrer que la série des  $u_n$  converge uniformément sur  $[0 ; 1]$ .

Montrons que la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

i) On a bien que  $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$  converge simplement sur  $[0, 1]$ , d'après a).

ii) Reste à montrer que la suite de fonctions  $(R_n(x))_{n \geq 0}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0, 1]$ .

$$\text{On } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

Déterminons une suite  $(d_n)_{n \geq 0}$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| \leq d_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

Soit alors  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in [0, 1]$ . On a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^{2(k+1)} \ln x \right|$$

$$= \left| \ln(x) \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot (x^2)^{k+1} \right|$$

$$= |\ln x| \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^{k+1} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-x^2)^k \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \left| \frac{(-x^2)^{n+2}}{1+x^2} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \frac{x^{2(n+2)}}{1+x^2}$$

$$|R_n(x)| \leq (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)} \quad \left( \text{car } \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \right)$$

Considérons la fonction  $h$  définie par:

$$(\forall x \in ]0,1[, h(x) = (-\ln x) x^{2(n+2)})$$

Déterminons  $\sup_{x \in ]0,1[} h(x)$ .

$h$  est dérivable sur  $]0,1[$ , et on trouve, après calculs que:

$$\forall x \in ]0,1[, h'(x) = -x^{2n+1} (2(n+2)\ln x + 1)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2(n+2)}}$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{2(n+2)}}$$

D'où le tableau de variations suivant :

$x$	0	$e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$	1
$h'(x)$		+	-
$h$		$\nearrow \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$	$\searrow$

$$h(x) = (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)}$$

$$\begin{aligned}
 h\left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right) &= -\ln\left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right) \times \left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right)^{2(n+2)} \\
 &= -\left(\frac{-1}{2(n+2)}\right) \times e^{-1} \\
 &= \frac{e^{-1}}{2(n+2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{valise : } (\forall x \in ]0, 1[ , h(x) \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)})$$

$$\text{Or } |R_n(x)| \leq (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)} = h(x)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0, 1[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

$$\text{Or } |R_n(0)| = 0 \text{ et } |R_n(1)| = 0$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| \leq \frac{e^{-1}}{2^{(n+2)}}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^{-1}}{2^{(n+2)}} \right) = 0$$

Enfin, la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .



c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

La série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .

Et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n$  est continue sur  $[0, 1]$ , car :

$\rightsquigarrow \forall x \in [0, 1], U_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$ , donc  $U_n$  continue sur  $[0, 1]$ .

$\rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow 0} U_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) = 0 = U_n(0)$

D'où :  $\int_0^1 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^1 U_n(x) dx \right)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) dx \right)$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(n) dx &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \left( \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right)' \ln x dx \\ &= (-1)^{n+1} \left( \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \times \frac{1}{x} dx \right) \\ &\quad = 0 \\ &= \frac{(-1)^n}{2n+3} \int_0^1 x^{2n+2} dx \\ &= \frac{(-1)^n}{2n+3} \cdot \left[ \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1) \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left( \ln x - \frac{\ln x}{1+x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Or  $\int_0^1 \ln x \, dx = \int_0^1 x! \cdot \ln x \, dx$

$$= \underbrace{\left[ x \ln x \right]_0^1}_{=0} - \underbrace{\int_0^1 1 \, dx}_{=1}$$

$$= -1$$

$$\mathcal{D}_m^1 - 1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx}_{=} = -1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Fin Exercici 11

### Exercice 14:

Soit  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

- Quel est le domaine de définition de  $f$ ?  
Étudier la continuité de  $f$  sur celui-ci.
- Montrer que  $f$  est strictement décroissante.
- Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

a) i)  $D_f = ?$

Tout  $x \in \mathbb{R}$ .

$x \in D_f \iff (\text{la série } \sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}} \text{ converge})$

Cas 1: Si  $x > 0$

$\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$  converge car  $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  CV

Cas 2: Si  $x \leq 0$

$\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$  diverge grossièrement car  $e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\not\rightarrow 0}$

Ainsi :

$$x \in D_f \iff x > 0$$

Et donc

$$D_f = ]0, +\infty[$$

a) ii) Montrons que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$  :

Posons  $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$  pour tout  $n \geq 1$  et  $x \in ]0, +\infty[$ .

On a :  $\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x)$

Pour montrer que  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , il suffit de vérifier que :

A)  $f_{n \geq 1}$  sont continues sur  $]0, +\infty[$ .

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge uniformément sur tout segment  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Pour A) ; c'est bien vérifié.

Pour B) :

Sur  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ . Montrons que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

Soient  $n \geq 1$  et  $x \in [a, b]$ . On a :

$$|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et que  $\sum_{n \geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$  converge, car  $a > 0$ .

D'où  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge normalement, donc uniformément sur  $[a, b]$ .

Enfin,  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$

b) Montrons que  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

Méthode 1

On montrera que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et que :

$$( \forall n \geq 0, f'(x) < 0 )$$

Montrons les points suivants pour tirer que  $f \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ :

A)  $f_{n \geq 1}$  sont de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

B)  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$ .

C)  $\sum_{n \geq 1} f'_n$  converge uniformément sur tout segment  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Pour A) : C'est bien vérifié.

Pour B) : Déjà fait.

Pour C) : Soit  $[a, b] \subset ]0, +\infty[$ .

Mais  $\sum_{n \geq 1} f_n'$  converge normalement sur  $[a, b]$ .

Il existe  $n \geq 1$  et  $x \in [a, b]$ . On a :

$$|f_n'(x)| = \sqrt{n} e^{-n\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}}$$

et  $\sum_n \sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}}$  converge car  $\sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  et que  $\sum_n \frac{1}{n^2}$  CV.

D'où  $\sum f_n'$  CN, et donc conv uniforme sur  $[a, b]$ .

De A), B) et C) on tire que  $f$  est d.c. dans  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et que :

$$(\forall n \geq 0) f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}} \quad (\circ)$$

Alors  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

### Méthode 2

On a  $(\forall x > 0) f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

et  $\forall n \geq 1, x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$

Car pour tout  $y$  dans  $]0, +\infty[$ , on a :

$$\begin{aligned} & (\forall n \geq 1, e^{-y\sqrt{n}} \leq e^{-x\sqrt{n}}) \\ \Rightarrow & \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{n}}} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}} \\ \Rightarrow & f(y) \leq f(x) \end{aligned}$$

c) Étudier la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right)$$

Pour qu'on puisse intervertir  $\lim_{x \rightarrow +\infty}$  avec  $\sum_{n=1}^{+\infty}$ , il suffit de vérifier les points suivants :

A)  $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = l_n \in \mathbb{R}$

B) La série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$  converge uniformément sur  $[1, +\infty]$ .

Pour A) :  $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$

Pour B) :

Il suffit de montrer la convergence normale de  $\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$  sur  $[1, +\infty]$ .

On a alors  $n \geq 1$  et  $x \in [1, +\infty]$ . On a :

$$|e^{-n\sqrt{n}}| = e^{-n\sqrt{n}} \leq e^{-1\sqrt{1}} = e^{-1}$$

et que la série positive  $\sum_{n \geq 1} e^{-1\sqrt{1}}$  converge, car  $e^{-1\sqrt{1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  converge.

D'où la convergence normale résulte.

De A) et B) on tire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}}}_{=0} \right)$$

$$= 0$$

d) Déterminer un équivalent simple de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

$f(n)$  ?  
 $n \rightarrow 0^+$

L'idée est classique à retenir

Soit  $n > 0$ .

$$\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} e^{-\pi\sqrt{t}} dt \leq e^{-\pi\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-\pi\sqrt{t}} dt$$

Car  $t \mapsto e^{-\pi\sqrt{t}}$  est décroissante sur  $[0, +\infty]$ .

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_n^{n+1} e^{-\pi\sqrt{t}} dt \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_{n-1}^n e^{-\pi\sqrt{t}} dt \right)$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-\pi\sqrt{t}} dt \leq f(n) \leq \int_0^{+\infty} e^{-\pi\sqrt{t}} dt \quad (\square)$$

et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\pi\sqrt{t}} dt &= 2 \int_0^{+\infty} u e^{-\pi u} du \quad (\text{avec le chang de variable } u = \sqrt{t}) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} u \left( \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} \right)' du \\ &= 2 \left( \underbrace{\left[ u \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} \right]}_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} du \right) \quad (\text{via une intégration par parties}) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\pi u} du$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\frac{2}{2}}{\pi^2}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned} \text{Circled integral: } & \int_1^{+\infty} e^{-\pi \sqrt{t}} dt = 2 \int_1^{+\infty} u e^{-\pi u} du \quad (\text{avec le chang de variable } u = \sqrt{t}) \\ & = 2 \int_1^{+\infty} u \left( \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} \right)' du \\ & = 2 \left( \left[ u \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} du \right) \quad \begin{array}{l} (\text{via une intégration}) \\ (\text{par parties}) \end{array} \\ & \qquad \qquad \qquad = \frac{e^{-\pi}}{\pi} \\ & = 2 \left( \frac{e^{-\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} e^{-\pi u} du \right) \\ & = 2 \left( \frac{e^{-\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{e^{-\pi u}}{-\pi} \right]_1^{+\infty} \right) \\ & = 2 \left( \frac{e^{-\pi}}{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{-\pi}}{\pi} \right) \\ & = \frac{2e^{-\pi}}{\pi^2} (1 + \frac{1}{\pi}) \end{aligned}$$

f(2) devient :

$$\forall n > 0, \frac{2e^{-n}}{n^2} (n+1) \leq f(n) \leq \frac{2}{n^2}$$

Or  $\frac{2e^{-n}}{n^2} (n+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$  et  $\frac{2}{n^2} > 0$

Alors

$$f(n) \underset{n \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{n^2}$$

Fin Exercice 14

**FIN**