

Suites et séries de fonctions

Exercice 1:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ sur $[0; 1]$.

Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.
- b) Étudier la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
- c) Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 3:

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

- a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .
- b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

- c) Étudier la convergence uniforme sur $[a; 1]$ avec $a > 0$.

Exercice 4:

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Préciser le sens de variation de S .
- c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

- d) Donner un équivalent de S en 0.
- e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Exercice 6:

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

Exercice 7:

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) \text{ avec } x \in [0; 1]$$

- Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
- Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.
- Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \rightarrow 0$.

Exercice 8:

Considérons la fameuse fonction *zéta de Riemann*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
- Étudier la monotonie et la convexité de ζ .
- Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
- Déterminer la limite de ζ en 1.
 - Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.
 - Tracer l'allure de la courbe de ζ .
- Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 10:

Soit

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Justifier l'existence de l'intégrale suivante, et calculer-la.

$$\int_0^1 \psi(x) \, dx$$

Exercice 11:

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0; 1]$.

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Exercice 12:

Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+ .**Exercice 13:**Pour $t > 0$, on pose $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$ Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \rightarrow 0^+$.**Exercice 14:**

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$

- a) Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.

- b) Montrer que f est strictement décroissante.
- c) Étudier la limite de f en $+\infty$.
- d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 15:

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

- a) Justifier que la fonction $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- c) Établir que f est continue sur $] -1; 1[$ puis que f est continue sur $] -\infty; -1[$ et $] 1; +\infty[$.
- d) Établir la continuité de f en 1.

Exercice 16:

Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$$

On note I le domaine de définition de

$$S: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

- a) Déterminer I .
- b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$?
- d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?

- e) Étudier la continuité de S sur I .

Exercice 17:

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$, on pose

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k A^k$$

- a) Montrer que f est bien définie et que $f(t) = (I - tA)^{-1}$.
- b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $f'(t) = A(I - tA)^{-2}$.

Exercice 18:

On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k$$

- a) Montrer que f est bien définie.
- b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$(I - tA)f'(t) = A$$

Fin

CORRECTION

CORRECTION

CORRECTION

Exercice 1:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ sur $[0; 1]$.

Solution

D'abord, si $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[0; 1]$, alors elle converge simplement vers f sur $[0; 1]$.

Cherchons d'abord la fonction f , sa limite simple.

Explicitons $f(x)$, pour tout $x \in [0; 1]$.

Soit $x \in [0; 1]$. On a $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$.

1) Si $x \in]0; 1]$

$$\text{On a } (\forall n \geq 1, u_n(x) = x^n \ln x)$$

$$\text{Donc } f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln(x)$$

a) Si $x \in]0; 1[$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \ln(x)$$

$$= 0 \quad \left(\text{car } 0 < x < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0 \right)$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= x^n \ln x \text{ si } x \in]0; 1] \\ \lim_n u_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ si $-1 < q < 1$

Rappel

Donc $\boxed{\forall x \in]0,1[, f(x) = 0}$

b) Si $x = 1$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(1)$$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0,1[\\ \lim_n U_n(0) = 0$$

$$\boxed{f(1) = 0} \text{ car } (\forall n \geq 1, U_n(1) = 0)$$

c) Si $x = 0$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(0)$$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0,1[\\ \lim_n U_n(0) = 0$$

$$\boxed{f(0) = 0} \text{ car } (\forall n \geq 1, U_n(0) = 0)$$

Enfin : $\boxed{\forall x \in [0,1], f(x) = 0}$

La suite de fonctions $(U_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers 0 sur $[0,1]$.

Étudions si $(U_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Il suffit de montrer l'existence d'une suite $(\alpha_n)_n$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in [0,1], |U_n(x) - 0| \leq \alpha_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{Càd : } \begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1], |U_n(x)| \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{cases}$$

$$U_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \in]0, 1] \\ U_n(0) = 0$$

$$\text{Càd : } \begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in]0, 1], |x^n \ln x| \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{cases}$$

$$\text{Càd : } \begin{cases} \forall n \geq 1, \forall x \in]0, 1], -x^n \ln x \leq d_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 \end{cases}$$

Soit $n \geq 1$.

Considérons la fonction $g : x \mapsto -x^n \ln x$, pour tout $x \in]0, 1]$.

g est dérivable sur $]0, 1]$, et on a :

$$(\forall x \in]0, 1], g'(x) = -x^{n-1}(1 + n \cdot \ln x)$$

Où a :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + n \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{n}}$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + n \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{n} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{1}{n}}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{-\frac{1}{n}}$	1
$g'(x)$		+	—
g	$g(e^{-\frac{1}{n}}) = \frac{1}{ne}$		

D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \geq 1, \forall x \in]0,1], g(x) = -x^n \ln x \leq \frac{1}{n.e} \\ \text{et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n.e} = 0 \end{array} \right.$$

Enfin :

$(U_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

Fin Exercice 1

Exercice 2:

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
- Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Solution

On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.

Solution

Notons U la limite simple de la suite de fonctions $(U_n)_n$ sur $[0; +\infty[$.

Déterminons U .

Soit $x \in [0; +\infty[$. $U(x) = ?$

On a :

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x)$$

par déf $= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} \sin(nx)$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0$ si $x > 0$.

Si $x \in]0; +\infty[$:

$$U(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{-nx}}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{suite bornée}}$$

$= 0$

Si $x=0$

$$U(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{e^{-n \cdot 0} \sin(0)}_{\rightarrow = 0, \text{ pour tout } n} = 0$$

Ainsi : $\forall x \in [0, +\infty[, U(n) = 0$

La suite de fonctions (U_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.



On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.
b) Étudier la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.

Solution

a) On avait montré que (u_n) CS vers 0 sur $[0; +\infty[$.

b) Soit $a > 0$.

La suite de fonction (u_n) converge-t-elle uniformément vers 0 sur $[a; +\infty[$?
↳ la fct nulle

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a; +\infty[$.

$$|u_n(x) - 0| \leq ? \quad \alpha_n$$

↳ où α_n ne dépend pas de x , et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$

On a :

$$\begin{aligned} |u_n(x) - 0| &= |e^{-nx} \sin(nx)| \\ &\leq e^{-nx} \quad (\text{car } |\sin(nx)| \leq 1) \\ &\leq e^{-na} \quad (\text{car } x \geq a) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a; +\infty[, |u_n(x) - 0| \leq e^{-na}$$

↳ c'est α_n , et n- dépend pas de x

$$\text{Et on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-na} = 0$$

Donc

$(u_n)_n$ converge unif vers 0 sur $[a; +\infty[$



On pose

$$u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx) \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$.
- b) Étudier la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$.
- c) Étudier la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Solution

À-t-on la convergence uniforme de la suite de fonctions (u_n) sur $[0; +\infty[$?

Càd : À-t-on que $\|u_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$?

Càd : $\left(\text{À-t-on que } \sup_{x \in [0; +\infty[} |e^{-nx} \sin(nx)| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 ? \right)$

Soit $n \geq 1$. On a :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0; +\infty[} |e^{-nx} \sin(nx)| \geq \left| e^{-n \times \frac{1}{n}} \sin\left(n \times \frac{1}{n}\right) \right| = e^{-1} \sin(1).$$

$$\text{D'où : } (\forall n \geq 1, \|u_n\|_\infty \geq e^{-1} \sin(1) > 0)$$

$$\text{Ainsi } \|u_n\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Enfin : La suite de fonctions $(u_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $[0; +\infty[$.

Fin Exercice 2

Exercice 3:

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c) Étudier la convergence uniforme sur $[a; 1]$ avec $a > 0$.

Solution

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .

Solution

Notons f la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$.

Déterminons f .

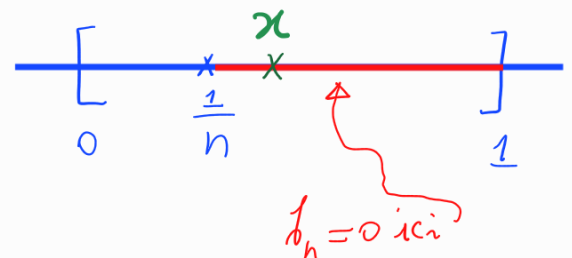
Soit $x \in [0, 1]$. $f(x) = ?$

On a :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

par déf

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



Si $0 < x < 1$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{Alors } (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} < x)$$

$$\text{On } f_n = 0 \text{ sur }]\frac{1}{n}, 1]$$

$$\text{Alors } f_n(x) = 0, \text{ pour tout } n \geq N$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$\text{Par suite } f(x) = 0 \text{ si } 0 < x < 1.$$

Si $x = 0$

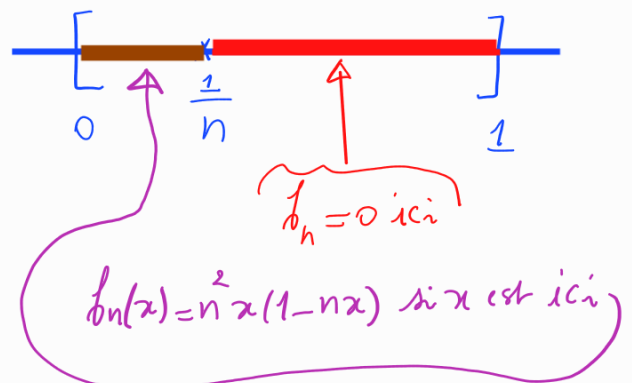
$$f(0) = ?$$

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0)$$

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, f_n(0) = n^2 \times 0 \times (1 - n \times 0) = 0 \\ \text{Car } 0 \leq 0 \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0$$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow f(0) = 0$$

$$b_n \text{ fin}, \quad f = 0 \text{ sur } [0, 1]$$

Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .

b) Calculer

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

Solution

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(t) dt &= \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x) dx \quad \left(\text{car } \forall x \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right], f_n(x) = 0 \right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x(1 - nx) dx \\ &= \frac{1}{6} \quad (\text{après calcul}). \end{aligned}$$

b) ii) Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

La réponse est **non** ; en effet.

Raisonnons par l'absurde, et supposons que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$. (vers 0 ; sa limite simple).

Or : $(\forall n \geq 1, f_n \text{ est continue sur } [0, 1])$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\int_0^1 f_n(t) dt}_{\rightarrow \frac{1}{6}} \right) = \int_0^1 \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right)}_{\rightarrow 0} dt$$

Alors $\frac{1}{6} = 0$, Ce qui est absurde



Soit $f_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = n^2 x(1 - nx) \text{ si } x \in [0; 1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

a) Étudier la limite simple de la suite (f_n) .

b) Calculer

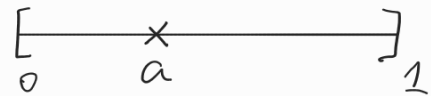
$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

c) Étudier la convergence uniforme sur $[a; 1]$ avec $a > 0$.

Solution

Soit $a > 0$.



(f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?

On sait que (f_n) conv simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

Alors il s'agit de voir si $\|f_n - 0\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ou non.

$$\text{On a : } \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x)|, \text{ et } f_n = 0 \text{ sur }]\frac{1}{n}, 1]$$

$$\text{Or } \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \right) \text{ alors : } (\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{1}{n} < a)$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq N, 0 < \frac{1}{n} < a \leq 1)$$

$$\text{Et puisque } (f_n = 0 \text{ sur }]\frac{1}{n}, 1])$$

Alors : $(\forall x \in [a, 1], f_n(x) = 0)$, pour tout $n \geq N$.

Ainsi : $\left(\forall n \geq N, \|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [a,1]} |f_n(x)| = 0 \right)$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = 0$

Càd que $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,1]$ (vers 0)

Fin Exercice 3

Exercice 4:

Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Préciser le sens de variation de S .
- c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

- d) Donner un équivalent de S en 0.
- e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Solution

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x); \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

- a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) i) M. que S est définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$. M. que $S(x)$ existe.

On a :

$$S(x) \text{ existe} \iff \text{La somme } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ existe}$$

$$\iff \text{La série } \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+x} \text{ converge}$$

Ce qui est vrai car C est une série alternée et que la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante de limite nulle.

D'où $S(x)$ existe. $\square$

a) ii) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x); \text{ où } f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Pour montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, il suffit de vérifier les points suivants :

- 1) $\forall n \geq 0, f_n$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$
- 2) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ C^1 sur $]0, +\infty[$.
- 3) La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f'_n$ C^0 sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$

Pour 1)

$\forall n \geq 0, f_n$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, par opération sur les fonctions de classe C^1 .

Pour β)

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ C.S. sur $]0, +\infty[$: ça veut dire que :

$$\left(\forall x \in]0, +\infty[, \text{ la série numérique } \sum_{n \geq 0} f_n(x) \text{ converge} \right)$$

Ce qu'on avait montré en a)i).

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$$

Pour δ)

La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ C.U. sur tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$?

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ C.U. sur $[a, b]$.

Il suffit de montrer la convergence normale sur $[a, b]$.

Soient alors $n \geq 0$ et $x \in [a, b]$.

$$|f'_n(x)| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2} \right|$$

S' il existe une suite $(\alpha_n)_n$ telle que

$$\left(\begin{array}{l} 1) \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|f_n(x)\| \leq \alpha_n \\ 2) \sum_n \alpha_n \text{ converge} \end{array} \right)$$

Alors La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge normalement sur X.

→ Rappel

$$= \frac{1}{(n+x)^2}$$

$$\leq \frac{1}{(n+a)^2} \quad (\text{car } (n+x)^2 \geq (n+a)^2 \text{ si } (x \geq a))$$

$$\text{Or } \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+a)^2} \text{ converge car } \frac{1}{(n+a)^2} \sim \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$. □

Enfin

$$S \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

□

b) Préciser le sens de variation de S .

S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Le signe de $S'(t)$ est celui du premier terme de la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+t)^2}, \text{ soit } \frac{(-1)^1}{t^2}, \text{ puisque c'est une série alternée}$$

et que la suite $\left(\frac{1}{(n+t)^2} \right)_{n \geq 0}$ est décroissante de limite nulle.

$$\text{D'où : } (\forall t \in]0, +\infty[, S'(t) \leq 0)$$

est donc S est décroissante sur $]0, +\infty[$. □

c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} ; \text{ pour tout } x > 0$$

Soit $x > 0$. On a :

$$S(x+1) + S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+x} + \frac{(-1)^n}{n+1+x} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n+x} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1+x} \right)$$

$$= \frac{(-1)^0}{0+x} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{(-1)^n}{n+x} \right)}_{=0}$$

$$= \frac{1}{x}$$

□

Si $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n - x_{n+1}) = x_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

d) Donner un équivalent de S en 0.

$$\text{On a : } \left(\forall x > 0, S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \right)$$

et on a $\lim_{x \rightarrow 0} S(x+1) = S(1)$ car S continue en 1 puisque $S \in C^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$

$$\text{et on a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{D'où } \left(\frac{1}{x} - S(x+1) \right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

$$\text{On a : } \left(\forall x > 0, S(x) + S(x+1) = \frac{1}{x} \right)$$

et on a :

$$\forall x > 1, S(x+1) \leq S(x) \leq S(x-1)$$

Car S est décroissante sur $]0, +\infty[$.

$$\text{D'où : } \forall x > 1, \underbrace{S(x) + S(x+1)}_{= \frac{1}{x}} \leq 2S(x) \leq \underbrace{S(x-1) + S(x)}_{= \frac{1}{x-1}}$$

$$\Rightarrow \left(\forall x > 1, \frac{1}{x} \leq 2S(x) \leq \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x} \text{ alors } 2S(x) \sim \frac{1}{x}$$

Enfin :

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x}}$$

Fin Exercice 4

Exercice 5:

On considère la série des fonctions

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

définies sur $\mathbb{R}_+$.

Étudier sa convergence simple, sa convergence normale et sa convergence uniforme.

Solution

1) Étudions la convergence simple de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

La série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge-t-elle ?

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

Càd, la série $\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge-t-elle ?

Cas 1 : Si $x > 0$

$$\text{On a } nx^2 \times (nx^2 e^{-x\sqrt{n}}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad (\text{par Croissance Comparée})$$

$$\text{D'où } nx^2 e^{-x\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Or $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge, alors $\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge $\square$

Cas 2 : Si $x = 0$

$\sum_n nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge, car c'est la série nulle.

Enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_n f_n(x) \text{ converge}$$

D'où la convergence *simple* de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.



2) Étudions la convergence *normale* de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Càd, la série positive $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge ou diverge-t-elle ?

Soit $n \geq 1$.

$$\|f_n\|_\infty = ?$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (n x^2 e^{-x\sqrt{n}})$$

Puis $f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

f_n dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

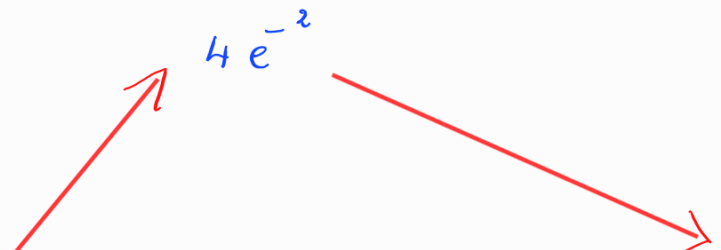
$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n (2x e^{-x\sqrt{n}} + x^2 \cdot (-\sqrt{n}) e^{-x\sqrt{n}}) \\ &= n x e^{-x\sqrt{n}} (2 - \sqrt{n} \cdot x) \end{aligned}$$

$$f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \frac{2}{\sqrt{n}})$$

$$f'_n(x) > 0 \Leftrightarrow x(2 - \sqrt{n} \cdot x) > 0$$

D'où le tableau de variations suivant de la fonction f_n :

$$a = -\sqrt{n} < 0$$

x	0	$\frac{2}{\sqrt{n}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	0	0	—
f_n			

$$f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

$$f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = n \cdot \frac{4}{n} \cdot e^{-\frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}} = 4 e^{-2}$$

$$\text{Donc } \left(\forall n \geq 1, \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} (f_n(x)) = 4 e^{-2} \right)$$

Ainsi, la série $\sum_n \|f_n\|_\infty$ **diverge** (grossièrement même), car $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow 0$ $n \rightarrow +\infty$.

Donc la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ **ne converge pas normalement** sur $\mathbb{R}^+$.

□

3) Étudions la convergence **uniforme** de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

On ne peut pas utiliser la convergence normale, puisqu'elle n'est pas réalisée.

On a :

$\sum_{n \geq 1} f_n$ converge **uniformément** sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si les deux conditions

suivantes sont réalisées :

a) $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$

b) La suite de fonctions $(R_n(x))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$

$$\text{où : } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

a) est vérifiée .

Pour b) :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} k x^2 e^{-x\sqrt{k}} \\ &\geq f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = n x^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^+, R_n(x) \geq f_{n+1}(x))$$

$$\text{D'où } \left(\forall n \geq 1, \sup_{x \in \mathbb{R}^+} R_n(x) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_{n+1}(x) \right)$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \|R_n\|_{\infty} \geq \underbrace{\|f_{n+1}\|_{\infty}}_{= 4e^{-2}}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \|R_n\|_{\infty} \geq 4e^{-2} > 0$$

Par suite $\|R_n\|_\infty \not\rightarrow 0$
 $n \rightarrow +\infty$

D'où la suite de fonctions $(R_n(x))_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.

Et enfin, $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

□

Fin Exercice 5

Exercice 6:

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

1)

Soit $x \in [0; +\infty[$ (fixé).

La série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge-t-elle ?

C'est, la suite réelle $(S_n(x))_{n \geq 0}$ converge-t-elle ? où $S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$.

$$\text{On a } u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On sait que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Notons $n_0 = \lfloor x \rfloor$. On a alors $n_0 \leq x < n_0 + 1$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\text{Alors } \begin{cases} u_{n_0}(x) = \frac{1}{n_0+1} \\ \forall k \neq n_0, u_k(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } \forall n \geq n_0, S_n(x) &= \sum_{k=0}^n u_k(x) \\ &= \frac{1}{n_0+1} \end{aligned}$$

On a ainsi : $(\forall n \geq n_0, S_n(x) = \frac{1}{[x]+1})$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{[x]+1} ,$$

D'où la suite réelle $(S_n(x))_{n \geq 0}$ converge .

Enfin :

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.



On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

2) Étudions la convergence uniforme sur $[0; +\infty[$ de $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$.

On a :

$$\sum_{n \geq 0} u_n(x) \text{ CL sur } [0; +\infty[\Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } \sum_{n \geq 0} u_n(x) \text{ CS sur } [0; +\infty[\\ \text{b) } (R_n(x))_{n \geq 0} \text{ CL vers } 0 \text{ sur } [0; +\infty[\end{cases}$$

a) $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ CS sur $[0; +\infty[$ est vérifiée.

Il nous reste à vérifier si b) $(R_n(x))_{n \geq 0}$ CL vers 0 sur $[0; +\infty[$ est vérifiée :

$$\text{Càd } \|R_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 ?$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

$$\forall x \in [0; +\infty[, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

$$\text{On a : } u_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{si } k \leq x < k+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x \in [0, n+1[: R_n(x) = 0 \\ \text{Si } x \in [n+1, n+2[: R_n(x) = \frac{1}{n+2} \\ \text{Si } x \in [n+2, n+3[: R_n(x) = \frac{1}{n+3} \\ \vdots \end{array} \right.$$

D'où $\|R_n\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, +\infty[} |R_n(x)| = \frac{1}{n+2}$, et ce pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$

En fin :

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.



On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0; +\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n; n+1[}(x)$$

3)

Étudions la convergence normale sur $[0, +\infty[$ de $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$.

Càd, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \|u_n\|_\infty$ converge-t-elle ou non?

Soit $n \in \mathbb{N}$ (fixé).

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = ?$$

$$\text{On a } |u_n(x)| = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Donc : } \left(\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} \right)$$

Alors la série $\sum_{n \geq 0} \|U_n\|_\infty$ diverge

En fin :

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ ne converge pas normalement
sur $[0, +\infty[$.

Fin Exercice 6

Exercice 8 :

Considérons la fameuse fonction zéta de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

- 1) Montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.
- 2) Etudier la monotonie et la convexité de ζ .
- 3) Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.
- 4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.
ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.
iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ .
- 5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1) Posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, pour tout $n \geq 1$ et $x \in]1, +\infty[$.

Pour montrer que f est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, il suffit de montrer que :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.

b) $\sum_{n \geq 1} f_n$ C ∞ sur $]1, +\infty[$

c) $\forall p \geq 1$, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ C $\cup$ sur tout segment $[a, b]$ de $]1, +\infty[$.

a) est Claire

b) est Claire aussi : $\sum \frac{1}{n^x}$ converge pour tout $x > 1$ (car c'est une série de Riemann).

c) Soit $p \geq 1$. Soit $[a, b] \subset]1, +\infty[$. On a :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [a, b], f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln n)^p}{n^x}$$

$$\Rightarrow \left(\forall n \geq 1, \forall x \in [a, b], |f_n^{(p)}(x)| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a} \right)$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge, (car si on prend $1 < \delta < a$, on

$$\text{aura } n^\delta \cdot \frac{(\ln n)^p}{n^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{et donc } \frac{(\ln n)^p}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$$

et puisque $\sum \frac{1}{n^\delta}$ converge (car $\delta > 1$)

D'où $\sum \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge normalement, et donc converge

uniformement sur $[a, b]$.

Enfin, ξ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, donc :

$$\forall p \geq 1, \forall x \in]1, +\infty[, \xi^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^p}{n^x}$$

2) i) Monotonie de ξ

ξ est dérivable sur $]1, +\infty[$, et par tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\xi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^x} \leq 0$$

D'où ξ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

2) ii) Convexité de ξ

ξ est 2 fois dérivable sur $]1, +\infty[$, et par tout $x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\xi''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0$$

D'où ξ est convexe sur $]1, +\infty[$.

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} \right)$$

Pour pouvoir intervertir, il suffit de vérifier :

$$a) \forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = l_n \in \mathbb{R}$$

$$b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \text{ converge uniformement sur } [2, +\infty[$$

Pour a)

Soit $n \geq 1$.

Si $n \geq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x(\ln n)} = 0$$

Si $n = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1^x} = 1$$

Pour b)

$$\forall n \geq 1, \forall x \in [2, +\infty[, \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\text{et on a } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge } (2 > 1)$$

$$\text{D'où } \sum \frac{1}{n^x} \text{ CN, donc CU sur } [2, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} \right) \end{aligned}$$

$$= \boxed{1}, \text{ car } l_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

Soit $x > 1$.

$$\text{On a } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

$$\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x}$$

Car $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[n, n+1]$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right) &\leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}}_{=\zeta(x)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{A lors } \lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$$

ii) Déterminer un équivalent simple de ζ en 1.

Clé : On encadre $\zeta(x)$ puis on tire $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} ?$

Soit $x > 1$.

$$\text{On a } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On encadre d'abord $\frac{1}{n^x}$, puis on introduit la somme $\sum_n^{+\infty}$:

$$\forall n \geq 2, \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt$$

Car $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est continue et décroissante sur $[n-1, n]$ et sur $[n, n+1]$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^n \frac{1}{t^x} dt \right) \\ \qquad \qquad \qquad = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \\ \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \\ \qquad \qquad \qquad = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1} + 1$$

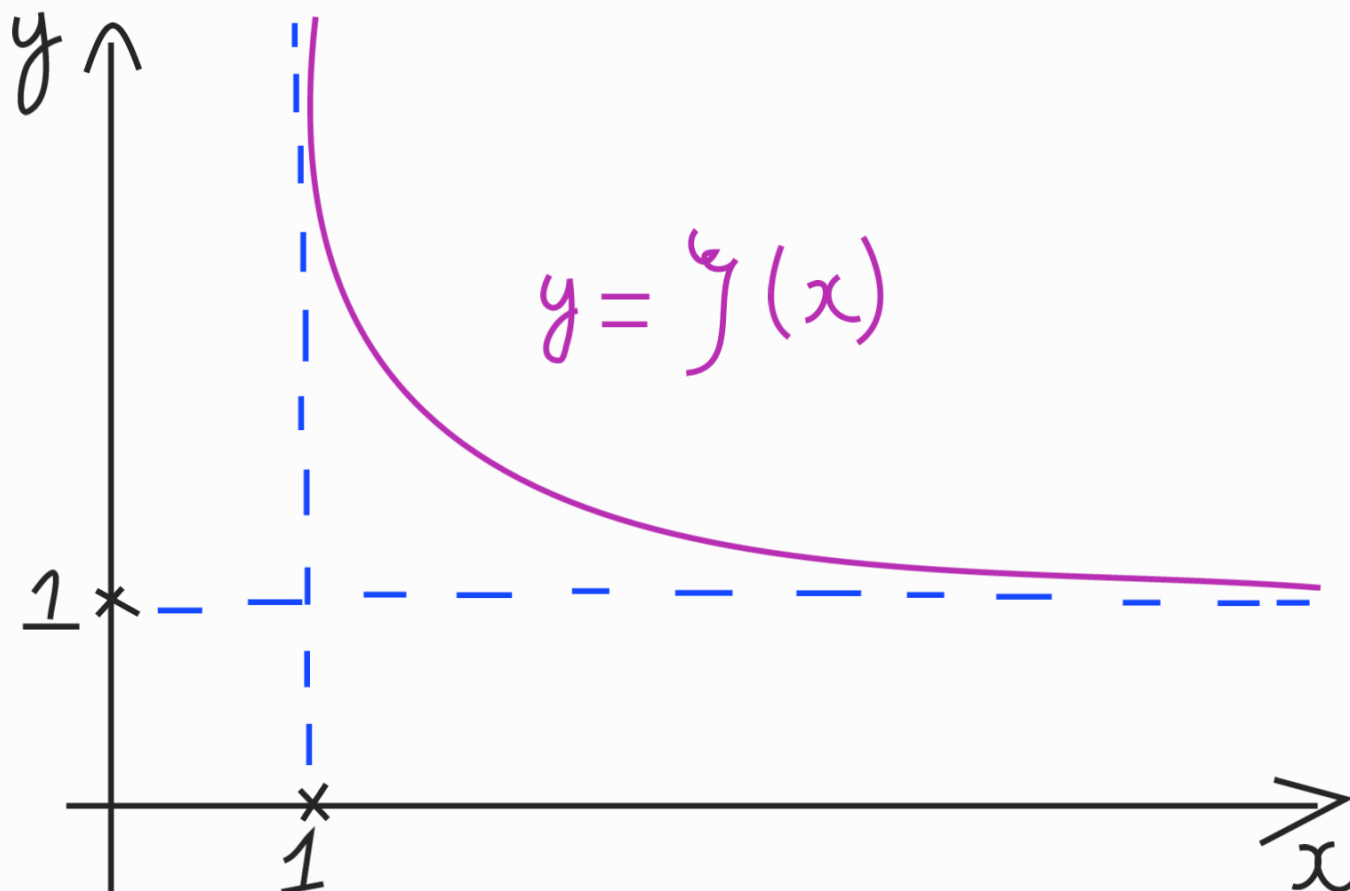
Soit : $\forall x > 1, \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \frac{1}{x-1} + 1$

$$\text{On } \left(\frac{1}{x-1} + 1 \right) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x-1} \quad \text{Car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

Alors

$$\zeta(x) \sim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1}$$

iii) Tracer l'allure de la courbe de ζ .



5) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\zeta(x))$ est convexe sur $]1, +\infty[$.
Vous pouvez appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Considérons la fonction $h: x \mapsto \ln(\zeta(x))$.
 h est bien deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$, et on a :

$$\forall x \in]1, +\infty[, h''(x) = \frac{\zeta''(x)\zeta(x) - (\zeta'(x))^2}{(\zeta(x))^2}$$

Alors

$$\left(h \text{ est Convexe sur }]1, +\infty[\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in]1, +\infty[, \{''(x)\}'' - (\{'(x)\})^2 \geq 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x \in]1, +\infty[, \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \right) \right)$$

Soit $x > 1$. Soit $N \geq 1$. On a :

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 = \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}} \right) \cdot \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}} \right) \right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n^{\frac{x}{2}}} \right)^2 \right) \times \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{x}{2}}} \right)^2 \right) \quad \left(\begin{array}{l} \text{d'après l'inégalité} \\ \text{de Cauchy-Schwarz} \end{array} \right)$$

Ainsi :

$$\forall N \geq 1, \left(\sum_{n=1}^N \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \right) \left(\sum_{n=1}^N \frac{(\ln n)^2}{n^x} \right)$$

Par passage à la limite " $N \rightarrow +\infty$ ", on obtient :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \right) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} \right)$$

Fin Exercice 8

Exercice 9:

On pose

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Montrer que la fonction ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Solution

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

1) Montrer que la fonction ζ_2 est définie sur $]0; +\infty[$:

Soit $x \in]0; +\infty[$.

Il s'agit de montrer que $\zeta_2(x)$, c'est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$, existe.

C'est que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge.

Ce qui est vrai, car c'est une série alternée, et que la suite

$\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^x} = 0$, puisque $x > 0$.

□

2) Montrer que la fonction ζ_2 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

(On a :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{où} \quad f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$$

a) Soit $n \geq 1$.

$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, par

opérations sur les fonctions de C^1 , C^2 .

b) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$, d'après 1°).

c) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, b]$.

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}.$$

$$f_n'(x) = \left(\frac{(-1)^n}{n^x} \right)'$$

$$= (-1)^n \cdot (n^{-x})'$$

$$= (-1)^n \cdot (e^{-x \ln n})'$$

$$= (-1)^n \cdot (-\ln n) \cdot e^{-x \ln n}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$$

On veut montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

converge uniformément sur $[a, b]$.

Brownillon

La Convergence normale n'aboutit pas.

On a :

$$0 < a \leq x \leq b$$

$$\left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x} \right| = \frac{\ln n}{n^x}$$

$$= \ln(n) \cdot n^{-x}$$

$$= \ln n \cdot e^{-x \ln n}$$

$$\leq \ln n \cdot e^{-a \ln n}$$

$$\hookrightarrow -x \leq -a$$

$$= \frac{\ln n}{n^a}$$

Mais $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{n^a}$ diverge si $0 < a < 1$, alors que $0 < a$.
« Bertrand » → classique et hors programme

On veut montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

Converge uniformément sur $[a, b]$.

i) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$ converge simplement sur $[a, b]$?

Soit alors $x \in [a, b]$. La série numérique $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$ converge, en effet :

On a $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x} \right)_n$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^x} = 0$

par croissance comparée. Et on conclut d'après le Critère de Leibniz pour les séries alternées.

ii) La suite de fonctions $(R_n(x))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$?

$$\text{on } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^x}.$$

Soient $n \geq 1$ et $x \in [a, b]$, on a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^x} \right|$$

$$\leq \left| (-1)^{n+2} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| \quad \left(\text{1er terme} \right)$$

Rappel

$$= \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}$$

$$0 < a \leq x \leq b$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \quad (\text{ne dépend pas de } x)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} = 0 \quad (\text{par croissance comparée, vu que } a > 0)$$

2°) si $(R_n(x))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 0 sur $[a, b]$. $\square$

De i) et ii) on conclut que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\ln n}{n^x}$

converge uniformément sur $[a, b]$.

Enfin, la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Fin Exercice 9

Exercice 11:

On pose

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in]0; 1] \text{ et } u_n(0) = 0$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0; 1]$.

c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Solution

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a : } u_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

$$\text{Soit } x \in [0, 1]. \text{ Calculons } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Cas 1 : Si $x=0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0 \quad (\text{Car } \forall n \in \mathbb{N}, u_n(0) = 0)$$

Cas 2 : Si $x \in]0, 1[$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot (x^2)^{n+1} \cdot \ln(x) \\
 &= \ln(x) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1} \\
 &= \ln(x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n \\
 &= \ln(x) \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{1 - (-x^2)}
 \end{aligned}$$

La somme de la série géométrique existe, car $|-x^2| = x^2 < 1$ vu que $0 < x < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \frac{-x^2 \ln(x)}{1+x^2}$$

Cas 3 : Si $x = 1$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} 1^{2n+2}}_{=0} \ln(1) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \begin{cases} \frac{-x^2 \ln(x)}{1+x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0; 1]$.

Montrons que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

i) On a bien que $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge simplement sur $[0, 1]$, d'après a).

ii) Reste à montrer que la suite de fonctions $(R_n(x))_{n \geq 0}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

$$\text{On a } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x).$$

Déterminons une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], |R_n(x)| \leq \alpha_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$. On a :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x^{2(k+1)} \ln x \right|$$

$$= \left| \ln(x) \cdot \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot (x^2)^{k+1} \right|$$

$$= |\ln x| \cdot \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^{k+1} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} (-x^2)^k \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \left| \frac{(-x^2)^{n+2}}{1+x^2} \right|$$

$$= (-\ln x) \cdot \frac{x^{2(n+2)}}{1+x^2}$$

$$|R_n(x)| \leq (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)} \quad \left(\text{car } \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \right)$$

Considérons la fonction h définie par:

$$(\forall x \in]0,1[, h(x) = (-\ln x) x^{2(n+2)})$$

Déterminons $\sup_{x \in]0,1[} h(x)$.

h est dérivable sur $]0,1[$, et on trouve, après calculs que:

$$\forall x \in]0,1[, h'(x) = -x^{2n+1} (2(n+2) \ln x + 1)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x < e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0	$e^{\frac{-1}{2(n+2)}}$	1	
$h'(x)$		+	0	-
h				

$$h(x) = (-\ln x) x^{2(n+2)}$$

$$\begin{aligned}
 h\left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right) &= -\ln\left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right) \times \left(e^{\frac{-1}{2(n+2)}}\right)^{2(n+2)} \\
 &= -\left(\frac{-1}{2(n+2)}\right) \times e^{-1} \\
 &= \frac{e^{-1}}{2(n+2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } (\forall x \in]0,1[, h(x) \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)})$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}, |R_n(x)| \leq (-\ln x) \cdot x^{2(n+2)} = h(x))$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[, |R_n(x)| \leq \frac{e^{-1}}{2(n+2)}$$

$$(\forall n, |R_n(0)| = 0 \text{ et } |R_n(1)| = 0)$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], |R_n(x)| \leq \frac{e^{-1}}{2^{(n+2)}}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-1}}{2^{(n+2)}} \right) = 0$$

Enfin, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.



c) En déduire l'égalité

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est continue sur $[0,1]$, car :

$$\leadsto \forall x \in]0,1], U_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x), \text{ donc } U_n \text{ continue sur }]0,1].$$

$$\leadsto \lim_{x \rightarrow 0} U_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) = 0 = U_n(0)$$

$$\text{D'où : } \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 U_n(x) dx \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) dx \right)$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) dx &= (-1)^{n+1} \int_0^1 \left(\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right)' \ln x dx \\
 &= (-1)^{n+1} \left(\underbrace{\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \ln x \right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \times \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \frac{(-1)^n}{2n+3} \int_0^1 x^{2n+2} dx \\
 &= \frac{(-1)^n}{2n+3} \cdot \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{-x^2 \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(x^2+1-1) \ln x}{1+x^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\ln x - \frac{\ln x}{1+x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \int_0^1 \ln x \, dx &= \int_0^1 x' \cdot \ln x \, dx \\ &= \underbrace{\left[x \ln x \right]_0^1}_{=0} - \underbrace{\int_0^1 1 \, dx}_{=1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } -1 - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx \right) &= -1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\ &= -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$$

Fin Exercice 11

Exercice 14:

Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$

- Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.
- Montrer que f est strictement décroissante.
- Étudier la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

a) i) $D_f = ?$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D_f \iff \left(\text{la série } \sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}} \text{ converge} \right)$$

Cas 1: Si $x > 0$

$$\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}} \text{ converge car } e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ CV}$$

Cas 2: Si $x \leq 0$

$$\sum e^{-x\sqrt{n}} \text{ diverge grossièrement car } e^{-x\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\not\rightarrow} 0$$

Ainsi :

$$x \in D_f \iff x > 0$$

Et donc

$$D_f =]0, +\infty[$$

a) ii) Montrons que f est continue sur $]0, +\infty[$:

Posez $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$.

$$\text{On a : } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

Pour montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$, il suffit de vérifier que :

A) $\forall n \geq 1$, f_n est continue sur $]0, +\infty[$.

B) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge unif sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Pour A) ; c'est bien vérifié.

Pour B) :

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. M. que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Soient $n \geq 1$ et $x \in [a, b]$. On a :

$$|f_n(x)| = e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et que $\sum_{n \geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, car $a > 0$.

D'où $\sum_{n \geq 1} f_n$ conv normalement, donc uniformément sur $[a, b]$.

Enfin, f est continue sur $]0, +\infty[$

b) M. que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Méthode 1

On montrera que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et que :

$$(\forall x > 0, f'(x) < 0)$$

Montrons les points suivants par tierce que $f \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$:

A) $\forall n \geq 1$, f_n de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

B) $\sum_{n \geq 1} f_n$ conv simplement sur $]0, +\infty[$.

C) $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$.

Pour A): c'est bien vérifié.

Pour B): Déjà fait.

Pour C): Soit $[a, b) \subset]0, +\infty[$.

M. que $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur $[a, b)$.

Soient $n \geq 1$ et $x \in [a, b)$. On a:

$$|f'_n(x)| = \sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}}$$

et $\sum_n \sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}}$ converge car $\sqrt{n} e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$.

D'où $\sum f'_n \in \mathcal{N}$, et donc conv. unif. sur $[a, b)$.

De A), B) et C) on tire que f est d. dans $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, et que:

$$(\forall x > 0) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\sqrt{n} e^{-x\sqrt{n}} < 0$$

Alors f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Méthode 2

$$\text{On a } (\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}})$$

et $\forall n \geq 1, x \mapsto e^{-x\sqrt{n}}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

D'où f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

Car pour tout $x < y$ dans $]0, +\infty[$, on a:

$$(\forall n \geq 1, e^{-y\sqrt{n}} < e^{-x\sqrt{n}})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{n}}}_{f(y)} < \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow f(y) < f(x)$$

c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right)$$

Pour qu'on puisse intervertir $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty}$, il suffit de vérifier les points suivants :

A) $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = l_n \in \mathbb{R}$

B) La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

Pour A) : $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 0$

Pour B) :

Il suffit de montrer la convergence normale de $\sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$ sur $[1, +\infty[$.

Soient alors $n \geq 1$ et $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$|e^{-n\sqrt{n}}| = e^{-n\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}}$$

et que la série positive $\sum_{n \geq 1} e^{-a\sqrt{n}}$ converge, (car $e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$)

et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

D'où la convergence normale voulue.

De A) et B) on tire que :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} \right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

$f(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} ?$

L'idée est classique : c'est à retenir

Soit $n > 0$.

$$\forall n \geq 1, \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt$$

Car $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt \right)$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \quad (12)$$

et on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt &= 2 \int_0^{+\infty} u e^{-xu} du \quad (\text{avec le chang de variable } u = \sqrt{t}) \\ &= 2 \int_0^{+\infty} u \left(\frac{e^{-xu}}{-x} \right)' du \\ &= 2 \left(\underbrace{\left[u \frac{e^{-xu}}{-x} \right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{-x} du \right) \quad (\text{via une intégration par parties}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du \\
&= \frac{2}{\lambda} \left[\frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

et on a aussi :

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} e^{-\lambda \sqrt{t}} dt &= 2 \int_1^{+\infty} u e^{-\lambda u} du \quad (\text{avec le chang de variable } u = \sqrt{t}) \\
&= 2 \int_1^{+\infty} u \left(\frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right)' du \\
&= 2 \left(\underbrace{\left[u \frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_1^{+\infty}}_{= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} du \right) \quad (\text{via une intégration par parties}) \\
&= 2 \left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_1^{+\infty} e^{-\lambda u} du \right) \\
&= 2 \left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{e^{-\lambda u}}{-\lambda} \right]_1^{+\infty} \right) \\
&= 2 \left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \right) \\
&= \frac{2e^{-\lambda}}{\lambda^2} (\lambda + 1)
\end{aligned}$$

(2) d'wient :

$$\forall x > 0, \frac{2e^{-x}}{x^2} (x+1) \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$$

Or $\frac{2e^{-x}}{x^2} (x+1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^2}$ et $\frac{2}{x^2} > 0$

Alors

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$$

Fin Exercice 14

FIN

