

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – A – (XLCR)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

Ce sujet porte sur l'étude des formes quadratiques sur un corps de caractéristique nulle et des groupes d'isométries associés.

## Notations, Définitions

Dans tout ce problème,  $\mathbb{K}$  désignera un corps de caractéristique nulle, c'est-à-dire un corps tel que, pour tout entier  $n \neq 0$ , on a  $n \cdot 1 \neq 0$  dans  $\mathbb{K}$  où 1 désigne l'unité de la loi multiplicative de  $\mathbb{K}$ , et  $n \cdot 1 = 1 + \dots + 1$ .

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension *finie*. On rappelle les trois points suivants.

– Une *forme bilinéaire symétrique sur  $V$*  est une application  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  telle que

$$b(x, y) = b(y, x) \text{ et } b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$$

pour tous  $x, y, z \in V$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

– Une *forme quadratique sur  $V$*  est une application  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  telle que :

i)  $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et tout  $v \in V$  ;

ii) l'application  $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $(x, y) \mapsto \tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$  est bilinéaire symétrique.

– Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si, pour tout  $v \in V - \{0\}$ , il existe  $w \in V$  tel que  $\tilde{q}(v, w) \neq 0$ .

On notera  $\mathcal{Q}(V)$  l'ensemble des formes quadratiques *non dégénérées* sur  $V$ .

Soient  $V$  et  $V'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

– Une *isométrie* entre deux formes quadratiques  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  et  $q' : V' \rightarrow \mathbb{K}$  est un isomorphisme linéaire  $f : V \rightarrow V'$  tel que  $q' \circ f = q$ . On notera  $q \cong q'$  si  $q$  et  $q'$  sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe une isométrie entre  $q$  et  $q'$ .

On notera  $O(q) := \{ f \in \text{GL}(V) \mid q \circ f = q \}$  le sous ensemble de  $\text{GL}(V)$  des isométries  $f : V \rightarrow V$  entre  $q$  et elle-même. On appelle  $O(q)$  le *groupe orthogonal* de  $q$ .

*Les deuxième et troisième parties du problème sont largement indépendantes.*

## Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$ . On note  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  la forme quadratique  $q$  définie sur  $\mathbb{K}^n$  par la formule

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2.$$

1. Démontrer que  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  est bien une forme quadratique sur  $\mathbb{K}^n$ .
2. Démontrer que l'application  $q \mapsto \tilde{q}$  est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques sur  $V$  sur les formes bilinéaires *symétriques* sur  $V$ .
3. Soit  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $V$ . On associe à toute forme bilinéaire symétrique  $b$  sur  $V$  une matrice symétrique  $\Phi_{\mathcal{B}}(b) := (b(e_i, e_j))_{i,j=1\dots n}$  appelée *matrice de  $b$  dans la base  $\mathcal{B}$* . On rappelle que  $b \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}(b)$  est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur  $V$  et celui des matrices symétriques carrées de taille  $n$ .
  - (a) Démontrer qu'une forme quadratique  $q$  sur  $V$  est non dégénérée si et seulement si le déterminant  $\det(\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q}))$  est non nul.
  - (b) Quelle est la matrice de  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ? En déduire que  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$ .
4. Soit  $q \in \mathcal{Q}(V)$  une forme quadratique non dégénérée sur  $V$ .
  - (a) Soit  $V'$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $q'$  une forme quadratique sur  $V'$ . Démontrer que si  $q$  et  $q'$  sont isométriques, alors  $q'$  est dans  $\mathcal{Q}(V')$ , c'est-à-dire non dégénérée.
  - (b) Pour  $x \neq 0$ , on note  $\{x\}^\perp := \{y \in V \mid \tilde{q}(x, y) = 0\}$ . Montrer que  $\{x\}^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  de dimension  $n - 1$ .
  - (c) A quelle condition sur  $x$  le sous-espace  $\{x\}^\perp$  est-il un supplémentaire de la droite  $\mathbb{K}x$  dans  $V$ ?
5. Soient  $q \in \mathcal{Q}(V)$  et  $q' \in \mathcal{Q}(V')$  où  $V'$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Démontrer que  $O(q)$  est un sous-groupe de  $\text{GL}(V)$  et que si  $q \cong q'$ , alors  $O(q)$  et  $O(q')$  sont deux groupes isomorphes.

## Première partie : Existence des bases orthogonales

Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle et  $q \in \mathcal{Q}(V)$ .

6. On dit que  $q$  est *isotrope* s'il existe  $x \in V - \{0\}$  tel que  $q(x) = 0$ . Dans le cas contraire, on dit que  $q$  est *anisotrope*.
  - (a) Démontrer qu'il existe  $x \in V$  tel que  $q(x) \neq 0$ .
  - (b) On note  $h$  la forme quadratique sur  $\mathbb{K}^2$  définie par  $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$  (on ne demande pas de vérifier que  $h$  est une forme quadratique). Montrer que si  $V$  est de dimension deux et  $q$  est isotrope alors  $q$  est isométrique à  $h$ .
  - (c) Démontrer que si  $q \in \mathcal{Q}(V)$  est isotrope, alors  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$  est surjective.
7. Une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $V$  est dite *orthogonale pour  $q$*  si  $\tilde{q}(e_i, e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une base orthogonale pour  $q$ .  
*Indication* : on pourra considérer  $\{x\}^\perp = \{y \in V \mid \tilde{q}(x, y) = 0\}$  et utiliser les questions 4c et 6a.
  - (b) En déduire qu'il existe  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} - \{0\}$  tels que  $q \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

## Deuxième partie : Étude de $O(q)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose dans cette partie que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

8. Soit  $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$  ( $n \geq 1$ ). Démontrer qu'il existe un couple d'entiers  $(r, s)$  ( $r + s = n$ ) tel que  $q$  soit isométrique à  $Q_{r,s}$  définie sur la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  par

$$Q_{r,s}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{j=r+1}^n x_j^2.$$

Soit  $j : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'isomorphisme linéaire qui à tout endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $O_{r,s} := j(O(Q_{r,s}))$  le sous-ensemble de matrices associé au groupe orthogonal  $O(Q_{r,s})$  de  $Q_{r,s}$ .

9. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire et  $M = j(f)$  sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Démontrer que  $M \in O_{r,s}$  si et seulement si  ${}^t M I_{r,s} M = I_{r,s}$  où  $I_{r,s}$  est la matrice  $I_{r,s} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,s} \\ 0_{s,r} & -I_s \end{bmatrix}$ ,  $I_p$  désigne la matrice identité de taille  $p \times p$  et  $0_{p,q}$  la matrice nulle de taille  $p \times q$  pour tous entiers  $p$  et  $q$ .

Que peut-on dire du déterminant  $\det(M)$  de  $M$  si  $M \in O_{r,s}$ ?

10. Démontrer que  $O_{r,s}$  est un sous-groupe *fermé* de  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  (on munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , de sa topologie de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie).

11. On note  $O(n)$  le groupe orthogonal usuel de  $\mathbb{R}^n$  (qui s'identifie à  $O_{n,0}$ ). On note  $K_{r,s} := O_{r,s} \cap O(n)$ .  
Démontrer que  $K_{r,s}$  est compact et en bijection avec  $O(r) \times O(s)$ .
12. Démontrer que  $SO(2) = \{M \in O(2) \mid \det(M) = 1\}$  est connexe par arcs.
13. Soit  $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2 + 1\}$  un hyperboloïde à deux nappes.
- (a) Démontrer que si  $f \in O(Q_{2,1})$ , alors  $f(H) = H$ .
- (b) On note  $SO_{2,1} := \{M \in O_{2,1} \mid \det(M) = 1\}$ . Démontrer que  $SO_{2,1}$  est un sous-groupe fermé de  $O_{2,1}$ .
14. Pour  $f \in O(Q_{2,1})$ , on note  $(x_f, y_f, z_f)$  le vecteur  $f(0, 0, 1)$ . On note également  $SO_{2,1}^+ := \{M = j(f) \in SO_{2,1} \mid z_f > 0\}$ .
- (a) Démontrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application linéaire  $r_t$  dont la matrice (dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ) vaut  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ch}(t) & \operatorname{sh}(t) \\ 0 & \operatorname{sh}(t) & \operatorname{ch}(t) \end{bmatrix}$  est dans  $SO_{2,1}^+$  (on pourra appeler par la suite une telle application linéaire une *rotation hyperbolique*).
- (b) Soit  $M = j(f)$ . On suppose que  $M \in SO_{2,1}^+$ . Montrer qu'il existe une rotation (au sens usuel)  $\rho$  d'axe  $(0, 0, 1)$  et  $t \in \mathbb{R}$  tels que  $r_t \circ \rho \circ f \in SO_{2,1}^+$  et vérifie  $r_t \circ \rho \circ f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ .
- (c) Démontrer que  $SO_{2,1}^+$  est connexe par arcs.
15. Dédurre de la question 14 que  $O_{2,1}$  est la réunion de quatre sous-ensembles fermés disjoints deux à deux et connexes par arcs.
16. Démontrer qu'il existe un morphisme surjectif de groupes  $\psi : O_{2,1} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  dont le noyau est  $SO_{2,1}^+$ .

## Troisième partie

On revient dans cette dernière partie au cas où  $\mathbb{K}$  est un corps quelconque de caractéristique nulle.

Si  $V$  et  $V'$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $q \in \mathcal{Q}(V)$  et  $q' \in \mathcal{Q}(V')$  sont deux formes quadratiques non dégénérées, la *somme orthogonale*  $q \perp q'$  de  $q$  et  $q'$  est la forme quadratique sur  $V \times V'$  définie par

$$q \perp q'(x, x') = q(x) + q'(x')$$

pour tout  $x \in V$  et tout  $x' \in V'$ .

17. Soient  $V, V'$  et  $V''$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $(q, q', q'') \in \mathcal{Q}(V) \times \mathcal{Q}(V') \times \mathcal{Q}(V'')$ .

(a) Montrer que  $q \perp q' \in \mathcal{Q}(V \times V')$  puis que  $(q \perp q') \perp q'' \cong q \perp (q' \perp q'')$ .

(b) Montrer que si  $q' \cong q''$  alors  $q \perp q' \cong q \perp q''$ .

(c) Démontrer que si  $V = V' \oplus V''$  et  $\tilde{q}(x, y) = 0$  pour tout  $x \in V'$  et tout  $y \in V''$ , alors  $q \cong q' \perp q''$  où  $q'$  est la restriction de  $q$  à  $V'$  et  $q''$  celle de  $q$  à  $V''$ .

18. Soient  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $q \in \mathcal{Q}(V)$  et  $v, w \in V$  deux vecteurs *distincts* de  $V$  tels que  $q(v) = q(w) \neq 0$ .

On veut montrer dans cette question qu'il existe alors une isométrie  $h \in O(q)$  telle que  $h(v) = w$ .

(a) Soit  $x \in V$  tel que  $q(x) \neq 0$ . On note  $s_x$  l'endomorphisme de  $V$  défini par  $y \mapsto s_x(y) = y - 2\frac{\tilde{q}(x, y)}{q(x)}x$ . Montrer que  $s_x$  et  $-s_x$  appartiennent à  $O(q)$ .

(b) On suppose ici que  $q(w - v) \neq 0$ . Montrer que l'application  $s_{w-v}$  est une isométrie telle que  $s_{w-v}(v) = w$ .

(c) On suppose ici que  $q(w - v) = 0$ . Montrer qu'il existe une isométrie  $g \in O(q)$  telle que  $g(v) = w$  et conclure.

19. Soient  $(V_i)_{1 \leq i \leq 3}$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et  $q_i \in \mathcal{Q}(V_i)$  pour  $1 \leq i \leq 3$  vérifiant  $q_1 \perp q_3 \cong q_2 \perp q_3$ . Montrer que  $q_1 \cong q_2$ .

*Indication* : on pourra raisonner par récurrence et utiliser les questions 17 et 18.

20. Soit  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $q \in \mathcal{Q}(V)$ . Montrer qu'il existe un unique entier  $m$  positif ou nul et une forme quadratique anisotrope  $q_{an}$ , *unique à isométrie près*, tels que  $q \cong q_{an} \perp m \cdot h$  où  $m \cdot h = h \perp \cdots \perp h$  est la somme orthogonale de  $m$  copies de  $h$  et  $h$  est la forme quadratique introduite par la question 6b.

*Indication* : on pourra utiliser la question 6b et la question précédente.

\* \*  
\*