

A. Équations algébriques réciproques

1°. Posons $P_n(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$.

Alors $X^n P_n\left(\frac{1}{X}\right) = X^n \left(\frac{a_n}{X^n} + \dots + \frac{a_1}{X} + a_0\right) = a_n + a_{n-1}X + \dots + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n \in \mathbb{R}_n[X]$

$u_n \circ u_n(P)(X) = u_n\left(X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right) = X^n \left(\frac{1}{X^n} P(X)\right) = P(X)$, Donc u_n est une symétrie.

2°. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, posons $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$.

• $P \in \mathcal{P} \iff u_n(P)(X) = P(X) \iff a_n + a_{n-1}X + \dots + a_0 X^n = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \iff \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket a_{n-p} = a_p$.

Exemple : $2X^3 + 5X^2 + 5X + 2, -5X^4 + 8X^3 + \sqrt{2}X^2 + 8X - 5$.

• $P \in \mathcal{D} \iff u_n(P)(X) = -P(X) \iff a_n + a_{n-1}X + \dots + a_0 X^n = -a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_0 \iff \forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket a_{n-p} + a_p = 0$.

Exemple : $X^3 + 5X^2 - 5X - 1$

3°. • Soit $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, et $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$. Soit $m = \deg P$ alors P s'écrit $P = a_m X^m + \dots + a_0$, de la question précédente $a_m = a_0$ ou $a_m = -a_0$, donc $a_0 \neq 0$, ainsi 0 n'est pas racine de P , et $x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x)$ ou $x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = -P(x)$ dans les deux cas $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ c-à-d $\frac{1}{x}$ est une racine de P .

• Supposons que $P \in \mathcal{D}$ alors $\forall p \in \llbracket 0, m \rrbracket, a_{m-p} + a_p = 0$

Si $m = 2k$, alors $P(1) = (a_{2k} + a_0) + (a_{2k-1} + a_1) + \dots + (a_k + a_k) = 0$.

Si $m = 2k + 1$, alors $P(1) = (a_{2k+1} + a_0) + (a_{2k} + a_1) + \dots + (a_{k+1} + a_k) = 0$.

• Supposons que $P \in \mathcal{P}$ alors $\forall p \in \llbracket 0, m \rrbracket, a_{m-p} = a_p$

Si $m = 2k + 1$, alors $P(-1) = (-a_{2k+1} + a_0) - (-a_{2k} + a_1) + \dots + (-1)^k (-a_{k+1} + a_k) = 0$.

4°. • Supposons que $Q, R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, $p = \deg P, q = \deg Q, r = \deg R$, alors $q + r = p$, et $P(X) = Q(X)R(X) = \varepsilon X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) \varepsilon' X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon \varepsilon' X^{q+r} (QR)\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon \varepsilon' X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$. Donc $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$.

• Supposons que $Q, P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, alors $P(X) = \varepsilon X^p P\left(\frac{1}{X}\right), Q(X) = \varepsilon' X^q Q\left(\frac{1}{X}\right)$ où $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$

$\varepsilon X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon' X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) R(X)$ et $P\left(\frac{1}{X}\right) = Q\left(\frac{1}{X}\right) R\left(\frac{1}{X}\right)$

$\varepsilon \varepsilon' X^r P\left(\frac{1}{X}\right) = Q\left(\frac{1}{X}\right) R(X)$ et $X^r P\left(\frac{1}{X}\right) = Q\left(\frac{1}{X}\right) X^r R\left(\frac{1}{X}\right)$

Q est un polynôme non nul et $(R(X) - \varepsilon \varepsilon' X^r R\left(\frac{1}{X}\right))Q\left(\frac{1}{X}\right) = 0$, alors le polynôme $R(X) - \varepsilon \varepsilon' X^r R\left(\frac{1}{X}\right)$ qui admet une infinité de racines est nul, c-à-d $R(X) = \varepsilon \varepsilon' X^r R\left(\frac{1}{X}\right)$.

• Si deux de ces polynômes sont des éléments de \mathcal{P} ou à \mathcal{D} , le troisième est un élément de \mathcal{P} .

• Si l'un de ces polynômes est un élément de \mathcal{P} et le deuxième est un élément de \mathcal{D} , le troisième est un élément de \mathcal{D} .

5°. • $P \in \mathcal{P} \implies (X-1)P \in \mathcal{D}$, car $X-1 \in \mathcal{D}$ et en utilisant la question précédente.

• Réciproquement, si $D \in \mathcal{D}$ de la question 3, le nombre 1 est une racine de D , ainsi $\exists P \in \mathbb{R}[X] / D = (X-1)P$ et de la question 4, $P \in \mathcal{P}$.

6°. • Soit $P \in \mathcal{P}$ de degré impair, alors -1 est racine de P question 3. il existe $Q \in \mathbb{R}[X] / P = (X+1)Q$, le polynôme $X+1 \in \mathcal{P}$, alors $Q \in \mathcal{P}$.

• Réciproquement, si $Q \in \mathcal{P}$, alors $(X+1)Q \in \mathcal{P}$.

7°. Si $p = 0$ ou $p = 1$ rien à faire.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ supposons que la propriété est vrai à l'ordre p . et remarquons que $\left(X^p + \frac{1}{X^p}\right) \left(X + \frac{1}{X}\right) =$

$$X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}} + X^{p-1} + \frac{1}{X^{p-1}}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence $\exists P, Q, R \in \mathbb{R}[X] / X^p + \frac{1}{X^p} = P\left(X + \frac{1}{X}\right)$, $X + \frac{1}{X} = Q\left(X + \frac{1}{X}\right)$ et $X^{p-1} + \frac{1}{X^{p-1}} = R\left(X + \frac{1}{X}\right)$

Le polynôme $PQ - R$ vérifie $X^{p+1} + \frac{1}{X^{p+1}} = (PQ - R)\left(X + \frac{1}{X}\right)$. La récurrence s'applique.

• S'il existe un autre polynôme Q qui vérifie les mêmes conditions, alors $\forall x \in \mathbb{R}^* ; P\left(x + \frac{1}{x}\right) = Q\left(x + \frac{1}{x}\right)$, le polynôme $P - Q$, admet une infinité de racines, il est nul.

Des étapes précédentes $\deg P = p$.

8°. • $R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$, $R(1) \neq 0$ et $R(-1) \neq 0$, de la question 3, $R \notin \mathcal{D}$, alors $R \in \mathcal{P}$ et le degré de R est pair.

$$\begin{aligned} \text{Posons } R &= a_{2r}X^{2r} + \dots + a_0 = X^r \left[\left(a_{2r}X^r + \frac{a_0}{X^r} \right) + \dots + \left(a_{r+1}X + \frac{a_{r-1}}{X} \right) + a_r \right] \\ &= X^r \left[a_{2r} \left(X^r + \frac{1}{X^r} \right) + \dots + a_{r+1} \left(X + \frac{1}{X} \right) + a_r \right] \text{ car } \forall p \in \llbracket 0, 2r \rrbracket, a_{2r-p} = a_p. \end{aligned}$$

De la question 7, $\forall q \in \llbracket 0, r \rrbracket, \exists P_q \in \mathbb{R}[X] / X^q + \frac{1}{X^q} = P_q\left(X + \frac{1}{X}\right)$, et $R(X) = \left(\sum_{q=0}^r a_{2r-q} P_q \right) \left(X + \frac{1}{X} \right) = X^r P\left(X + \frac{1}{X}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. alors $R(x) = 0 \iff P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$.

• Si P est un polynôme qui vérifie l'équivalence précédente alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ les polynômes λP , P^2 vérifient aussi l'équivalence : l'unicité du polynôme et de son degré est superflue.

B. Un problème de dénombrement

9°. • $S_{i,j} = \{(u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} / u_0 = 1; u_0 + u_1 + \dots + u_i = j\}$

$S'_{i,j} = \{(u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} / u_0 = 1; u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq j\}$ il apparaît que $S_{i,j} \subset S'_{i,j}$

• Soit $(u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} \in S'_{i,j}$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, i\}$, $u_k \leq u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq j$, les valeurs possibles de u_k sont dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, j\}$, par suite $S_{i,j} \subset S'_{i,j} \subset \{0, 1, \dots, j\}^{i+1}$ qui est fini.

Posons $\varphi : S_{i+1,j} \longrightarrow S'_{i,j}$, $u \longmapsto u / \{0,1,\dots,i\}$.

• Soit $u = (u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i+1\}} \in S_{i+1,j}$ alors $u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq u_0 + u_1 + \dots + u_i + u_{i+1} = j$ par suite $u' = (u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} \in S'_{i,j}$ et φ est bien définie.

• Soit $v = (v_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} \in S'_{i,j}$, définissons $u = (u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i+1\}} \in S_{i+1,j}$ de la façon suivante : $u_0 = 1$, $u_1 = v_1, \dots, u_i = v_i$ alors $u_0 + u_1 + \dots + u_i = v_0 + v_1 + \dots + v_i \leq j$, en posant $u_{i+1} = j - u_0 + u_1 + \dots + u_i \in \mathbb{N}$, alors $u_0 + u_1 + \dots + u_i + u_{i+1} = j$, par suite $u \in S_{i+1,j}$ et $\varphi(u) = v$, l'application φ est surjective.

• Soient $u, u' \in S_{i+1,j} / \varphi(u) = \varphi(u')$ par définition de $\varphi \forall k \in \{0, 1, \dots, i\}$, $u_k = u'_k$. l'égalité $u_0 + \dots + u_{i+1} = j = u'_0 + \dots + u'_{i+1}$ implique $u_{i+1} = u'_{i+1}$ c-à-d $u = u'$ et φ est injective.

• Conclusion φ est une application bijective, les ensembles sont finis, alors $\text{Card } S_{i+1,j} = \text{Card } S'_{i,j}$. c-à-d $s_{i+1,j} = s'_{i,j}$.

10°. • $S'_{i,j+1} = \{(u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} / u_0 = 1; u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq j + 1\}$

$S_{i,j+1} = \{(u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} / u_0 = 1; u_0 + u_1 + \dots + u_i = j + 1\}$

$S'_{i,j} = \{(u_k)_{k \in \{0,1,\dots,i\}} / u_0 = 1; u_0 + u_1 + \dots + u_i \leq j\}$

Il est évident que $S'_{i,j+1} = S_{i,j+1} \cup S'_{i,j}$ et $S_{i,j+1} \cap S'_{i,j}$.

Alors $s'_{i,j+1} = s_{i,j+1} + s'_{i,j}$, et $s'_{i+1,j+1} = s_{i+1,j+1} + s'_{i+1,j}$

$= s'_{i,j+1} + s'_{i+1,j}$ de la question 9

11°. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $n \geq 2$, considérons l'hypothèse $H_n \ll (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, / i + j = n, s'_{i,j} = \binom{i+j-1}{i} \gg$.

• Montrons H_n par récurrence. Pour $n = 2$; $s'_{1,1} = s_{2,1} = 1 = \binom{1}{1}$, car la seule famille qui appartient à $S_{2,1}$ est $(1, 0, 0)$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $n \geq 2$, et supposons que H_n est vrai à l'ordre n , et soit $(i, j) \in \mathbb{N}^{*2} / i + j = n + 1$, alors $i + (j - 1) = n$ et $(i - 1) + j = n$, l'hypothèse de récurrence $s'_{i,j-1} = \binom{i+j-2}{i}$ et $s'_{i-1,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$
 $s'_{i,j} = s'_{i-1,j-1} + s'_{i,j}$ question 10
 $= \binom{i+j-2}{i} + \binom{i+j-2}{i-1} = \binom{i+j-1}{i}$.

• On conclut avec $\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \geq 2}} \{(i, j) \in \mathbb{N}^{*2} / i + j = n\} = \mathbb{N}^{*2}$.

• La relation $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^{*2} / i \geq 2, s_{i,j} = s'_{i-1,j} = \binom{i+j-2}{i-1}$ en découle de la question 9.

• Cette même relation est encore valable pour $(i, j) \in \{1\} \times \mathbb{N}^*$. $s_{1,j} = 1$, la seule famille existant est $(1, j - 1)$

C. Polynôme caractéristique d'un produit de matrices

12°. Si A est inversible, alors $\det(AB - \lambda I_n) = \det A \det(B - \lambda A^{-1}) = \det(B - \lambda A^{-1}) \det A = \det(BA - \lambda I_n)$.

13°. Dans le cas général, les valeurs propres de A sont en nombre finies, $\exists k_0 \in \mathbb{N}^* / k \geq k_0; \frac{1}{k}$ n'est pas une

valeur propre, c-à-d $\det\left(A - \frac{1}{k}I_n\right) \neq 0$, la suite $\left(A - \frac{1}{k}I_n\right)_{k \geq k_0}$ formé de matrice inversible vérifie

$$\det\left(\left(A - \frac{1}{k}I_n\right)B - \lambda I_n\right) = \det\left(\left(A - \frac{1}{k}I_n\right)B - \lambda I_n\right) \text{ et ceci } \forall k \geq k_0.$$

les applications $x \mapsto \det((A - xI_n)B - \lambda I_n)$ et $x \mapsto \det((A - xI_n)B - \lambda I_n)$ sont continues sur \mathbb{R} , en faisant tendre k vers l'infini, on obtient $\det(AB - \lambda I_n) = \det(BA - \lambda I_n)$.

D. Etude spectrale de certaines matrices

14°. Remarquons que $s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} = \binom{i+j-2}{j-1} = s_{j,i}$, la matrice S est symétrique réelle, elle est diagonalisable (**Théorème spectrale**)

• Pour $n = 0$, $S = (s_{1,1}) = (1)$ rien à faire.

• Pour $n = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Phi_S = X^2 - 3X + 1 \in \mathcal{P}$; ses valeurs propres sont $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ et

$$\text{enfin } S = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

• Pour $n = 0$, $\Phi_S = 1 - X \in \mathcal{D}$.

$n = 1$, $\Phi_S = X^2 - 3X + 1 \in \mathcal{P}$.

$$n = 2 \quad \Phi_S = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 & 1 \\ 1 & 2 - X & 3 \\ 1 & 3 & 6 - X \end{vmatrix} = -X^3 + 9X^2 - 9X + 1 \in \mathcal{D}.$$

15°. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

• L'application $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

• $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ψ est bien définie.

• ψ est une application bilinéaire symétrique.

• $\psi(P, P) \geq 0$, car $P \in \mathbb{R}[X]$.

• $\psi(P, P) = 0 \implies \forall t \in [0, +\infty[, P(t) = 0$, le polynôme P qui admet une infinité de racines est nul.

• Conclusion : ψ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16°. • La formule de Taylor appliqué $P \in \mathbb{R}_n[X]$ nous donne $P = \sum_{i=0}^n P^{(i)}(0) \frac{X^i}{i!}$, alors la famille \mathcal{B} est génératrice qui est en plus minimale c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\bullet \Psi(B_i, B_j) = \frac{1}{i!j!} \Gamma(i+j+1) = \frac{(i+j)!}{i!j!}. \text{ Pour } (i, j) \in \mathbb{N}^{*2}, s_{i,j} = \binom{i+j-2}{i-1} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!} = \Psi(B_{i-1}, B_{j-1}).$$

• S est la matrice d'un produit scalaire : S est définie positive, et $\text{rang } S = n + 1 = \text{rang } S'$, car la matrice S'_{n+1} s'en déduit de S_{n+2} par translation d'une ligne en haut et les $(n + 1)$ colonnes de S'_{n+1} et S_{n+2} sont les mêmes [$s'_{i,j} = s_{i+1,j}$].

17°. • Par récurrence sur k , on vérifie que $f_i^{(k)} = P_k(t)e^{-t}$ où P_k est un polynôme de degré k et le résultat $f_i^{(k)}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^k}\right)$ en découle.

Remarque : Le polynôme P_k admet 0 comme racines dans le cas où $k < i$.

• La formule de Leibnitz donne :

$$f_i^{(i)}(t)(t) = \sum_{p=0}^i \binom{i}{p} (t^i)^{(i-p)} (e^{-t})^{(p)} = \sum_{p=0}^i \binom{i}{p} (-1)^p \frac{i!}{p!} t^p e^{-t}, \text{ donc } (-1)^i \frac{f_i^{(i)}(t)(t)}{i!} e^t = \sum_{p=0}^i \binom{i}{p} (-1)^{p+i} \frac{t^p}{p!}$$

18°. • Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $j \leq i$.

$$\bullet \Psi(L_i, B_j) = \int_0^{+\infty} L_i(t) B_j(t) dt = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} f_i^{(i)} B_j(t) dt = \frac{(-1)^i}{i!} [f_i^{(i-1)}(t) B_j(t)]_0^{t \rightarrow +\infty} - \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{+\infty} f_i^{(i-1)} B_j'(t) dt.$$

La question 17 et sa remarque montre que Le crochet est nul.

$$\text{Ainsi une récurrence montre que } \Psi(L_i, B_j) = \int_0^{+\infty} L_i(t) B_j(t) dt = \frac{(-1)^i}{i!} (-1)^j \int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t) dt.$$

• Si $j < i$, alors $\int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t) dt = [f_i^{(i-j-1)}(t)]_0^{t \rightarrow +\infty} = 0$ car $i - j - 1 < i$ et la remarque de la question 17.

• Si $j = i$, $\int_0^{+\infty} f_i^{(i-j)}(t) dt = \int_0^{+\infty} f_i^{(0)}(t) dt = \int_0^{+\infty} f_i(t) dt = i!$, donc $\Psi(L_i, B_j) = 1$

• Conclusion $\Psi(L_i, L_i) = \Psi(L_i, B_i) = 1$ et si $j < i$, $\Psi(L_i, l_j) = \Psi(L_i, B_j) = 0$. La famille \mathcal{L} est orthnormale.

19°. • Soit τ' l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $\tau'(P)(X) = P(X + 1)$, on vérifie que $\tau' = \tau^{-1}$ et $U = \text{mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(\tau')$.

$$\text{De plus } \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket; \tau(X^i) = (X - 1)^i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} \binom{i}{k} X^k \text{ et } \tau'(X^i) = (X + 1)^i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} X^k.$$

• T et U sont des matrices triangulaires supérieures dont leurs termes généraux sont respectivement :

$$t_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases} \quad u_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

• $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $L_i(t) = \sum_{k=0}^i (-1)^{k+i} \binom{i}{k} B_p(t)$, donc $P_{\mathcal{L}}^{\mathcal{L}} = T$ et $U = P_{\mathcal{L}}^{\mathcal{B}}$.

• $S = (\Psi(B_{i-1}, B_{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n+1}$, $I_n = (\Psi(L_{i-1}, L_{j-1}))_{1 \leq i, j \leq n+1}$ de la relation $I_n = {}^t P S P$ où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{L}} = T$ on en déduit $I_n = {}^t T S T$, donc $S = {}^t T^{-1} T^{-1} = {}^t U U$.

Ainsi $\det S = (\det U)^2 = 1$ car U est une matrice triangulaire supérieur dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

20°. Posons $D = (d_{i,j})$ et $U = (u_{i,j})$.

$$\bullet (DU)_{i,j} = \sum_{k=1}^n d_{ik} u_{kj} = d_{ii} u_{ij}.$$

$$\bullet \text{Pour } i \leq j; (DU)_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n (DU)_{i,k} (DU)_{k,j} = \sum_{i \leq k \leq j} d_{ii} u_{ik} d_{kk} u_{kj}$$

$$= \frac{d_{ii}(j-1)!}{(i-1)!} \sum_{i \leq k \leq j} (-1)^{k+1} \frac{(j-i)!}{(k-i)!(j-k)!}$$

$$= \frac{d_{ii}(j-1)!}{(i-1)!} \sum_{i \leq k \leq j} (-1)^{k+1} \binom{j-i}{j-k} = \frac{d_{ii}(j-1)!}{(i-1)!} \sum_{p=0}^{j-i} (-1)^{j+p} \binom{j-i}{p} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

• Pour $i > j$, $u_{ij} = 0$ donc $(DU)_{i,j}^2 = 0$

• Conclusion $(DU)^2 = I_{n+1}$.

• On vérifie aisément que $D(U^t U) D = U^{-1} t U^{-1}$; $D^2 = I_{n+1}$ donne $D^{-1} = D$ et les matrices $(U^t U)$ et S^{-1} sont semblables.

21°. • $\Phi_{U^t U} = \Phi_{S^{-1}}$ et les matrices $U^t U$ et $U U$ ont le même polynôme caractéristique, donc $\Phi_{S^{-1}} = \Phi_{U U} = \Phi_S$.

- Donc $\Phi_S = \det(S^{-1} - XI_{n+1}) = X^n \det\left(\frac{1}{X}S^{-1} - I_{n+1}\right)$
 $= X^n \det S^{-1} \det\left(\frac{1}{X}I_{n+1} - S\right) = X^n(-1)^n \det\left(S - \frac{1}{X}I_{n+1}\right)$ car $\det S = 1$.

Conclusion :

- $\Phi_S \in \mathcal{P}$ si n est pair.
- $\Phi_S \in \mathcal{D}$ si n est impair.

sadikoumeki@yahoo.fr