

EPREUVE DES PETITES MINES, COMMUNE, 1995 - CORRIGE

Problème 1

Partie I

1. (a) i. On cherche le développement limité (si il existe) de $1/t - 1/\sin t$ en 0 à l'ordre 4. Calculons tout d'abord l'ordre k auquel il est nécessaire d'effectuer le développement limité de $\sin t$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} &= \frac{1}{t} - \frac{1}{t \text{DL}_{k-1}} = \frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{\text{DL}_{k-1}} \right) \\ &= \frac{1}{t} (1 - \text{DL}_{k-1}) = \frac{1}{t} \text{DL}_{k-1} = \text{DA}_{k-2}\end{aligned}$$

Donc $k - 2 = 4$. Il est donc nécessaire d'effectuer un développement limité de $\sin t$ à l'ordre 6.

$$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o_{t \rightarrow 0}(t^6)$$

Donc :

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{120}t^4 + o_{t \rightarrow 0}(t^5)}$$

Par division selon les puissances croissantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin t} &= \frac{1}{t} \left(1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{7}{360}t^4 + o_{t \rightarrow 0}(t^5) \right) \\ \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} &= -\frac{1}{6}t - \frac{7}{360}t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^4)\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi(t) = -\frac{1}{6}t - \frac{7}{360}t^3 + o_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}}(t^4)$$

Comme $\varphi(0) = 0$, on en déduit :

$$\boxed{\varphi(t) = -\frac{1}{6}t - \frac{7}{360}t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^4)}$$

- ii. Par troncature, φ admet un développement limité en 0 à l'ordre 0 donc est continue en 0. De même φ admet un développement limité en 0 à l'ordre 1 donc φ est dérivable en 0 et :

$$\boxed{\varphi'(0) = -\frac{1}{6}}$$

- (b) D'après les théorèmes usuels, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$. D'après la question précédente, φ est continue et dérivable en 0. Il reste à montrer que φ' est continue en 0. Or :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \quad \varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t}$$

On cherche la limite de cette expression lorsque t tend vers 0. Il est donc nécessaire d'en effectuer un développement limité à l'ordre 0. Un raisonnement similaire à celui de la question précédente nous montre qu'il faut effectuer un développement limité de $\sin^2 t$ à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\sin t &= t - \frac{1}{6}t^3 + o_{t \rightarrow 0}(t^3) \\ \sin^2 t &= t^2 \left(1 - \frac{1}{6}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right)^2 \\ &= t^2 \left(1 - \frac{1}{3}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right)\end{aligned}$$

Donc, par division selon les puissances croissantes :

$$\begin{aligned}\frac{\cos t}{\sin^2 t} &= \frac{1}{t^2} \frac{1 - \frac{1}{2}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)}{1 - \frac{1}{3}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)} \\ &= \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{1}{6}t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2) \right) \\ -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} &= -\frac{1}{6} + o_{t \rightarrow 0}(1)\end{aligned}$$

Donc :

$$\varphi'(t) \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} -\frac{1}{6} = \varphi'(0)$$

Donc φ' est continue en 0.

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

(c) On remarque que :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \quad \psi(t) = 1 - t\varphi(t)$$

De plus cette égalité est vraie en 0, donc :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \psi(t) = 1 - t\varphi(t)$$

D'après la question précédente et les théorèmes usuels, on en déduit que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et :

$$\forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \psi'(t) = -\varphi(t) - t\varphi'(t)$$

En particulier, pour $t = 0$, on a :

$$\boxed{\psi'(0) = 0}$$

2. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors, pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) \, dt \right| &= \left| \int_a^b \underbrace{g(t)}_{\text{dérive}} \overbrace{\sin(\lambda t)}^{\text{intègre}} \, dt \right| \quad \text{car } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ &= \left| \left[g(t) \frac{(-1)}{\lambda} \cos(\lambda t) \right]_a^b - \int_a^b g'(t) \frac{(-1)}{\lambda} \cos(\lambda t) \, dt \right| \\ &\leq \frac{|g(b)| + |g(a)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |g'(t)| \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b] : \\ \int_a^b g(t) \sin(\lambda t) \, dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \end{array}}$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0, \pi[$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{i2kt} &= \sum_{k=1}^n (e^{i2t})^k \\ &= e^{i2t} \sum_{k=1}^n (e^{i2t})^{k-1} \\ &= e^{i2t} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i2t})^k \\ &= e^{i2t} \frac{1 - e^{i2nt}}{1 - e^{i2t}} \quad \text{car } e^{i2t} \neq 1 \\ &= e^{i2t} \frac{e^{int} (e^{-int} - e^{int})}{e^{it} (e^{-it} - e^{it})} \\ &= e^{i(n+1)t} \frac{(-2i) \sin(nt)}{(-2i) \sin t} \\ &= e^{i(n+1)t} \frac{\sin(nt)}{\sin t} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{i2kt} \right) \\ &= 1 + 2 \cos((n+1)t) \frac{\sin(nt)}{\sin t} \\ &= \frac{\sin t + 2 \cos((n+1)t) \sin(nt)}{\sin t} \\ &= \frac{\sin t + \sin(2n+1)t - \sin t}{\sin t} \\ &= \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in]0, \pi[\quad S_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}}$$

(b) On a :

$$S_n(0) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n 1 = 1 + 2n \quad \text{et} \quad S_n(\pi) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n 1 = 1 + 2n$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n(0) = S_n(\pi) = 1 + 2n}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S_n(t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(2kt) \right] dt \\
 &= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt) dt \\
 &= \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(2kt)}{2k} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad J_n = \frac{\pi}{2}}$$

Partie II

1. (a) D'après la question 1.b de la partie I, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$. Donc, d'après la question 2 de la partie I :

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$$

(b) Puisque :

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{t} = (2n+1) \frac{\sin((2n+1)t)}{(2n+1)t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2n+1$$

l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$$

a bien un sens. De plus :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) \sin((2n+1)t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt \\
 &= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}}$$

2. (a) i. Puisque :

$$\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 1.}$$

- ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \\
 &= \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} (2n+1) \frac{\sin u}{u} \frac{1}{2n+1} du \quad u = (2n+1)t \\
 &= F\left((2n+1) \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad F\left((2n+1) \frac{\pi}{2}\right) = I_n}$$

- (b) Soit $x \geq \pi/2$. Alors :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} x - 1 \right) \geq 0$$

On pose :

$$n = E\left(\frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} x - 1 \right)\right) \geq 0$$

Alors :

$$n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} x - 1 \right) < n+1$$

$$2n \leq \frac{2}{\pi}x - 1 < 2n + 2$$

$$2n + 1 \leq \frac{2}{\pi}x < 2n + 3$$

$$(2n + 1) \frac{\pi}{2} \leq x < (2n + 3) \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geq \pi/2, \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que :}} \\ (2n + 1) \frac{\pi}{2} \leq x < (2n + 3) \frac{\pi}{2}$$

(c) Soit $x \geq 3\pi/2$. Alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t} dt \right| &\leq \int_{\alpha(x)}^x \frac{|\sin t|}{t} dt \\ &\leq \int_{\alpha(x)}^x \frac{dt}{t} \\ &\leq \int_{\alpha(x)}^x \frac{dt}{\alpha(x)} \\ &\leq \frac{x - \alpha(x)}{\alpha(x)} \\ &\leq \frac{\pi}{x - \pi} \quad \text{car } x - \alpha(x) \leq \pi \text{ et } \alpha(x) \geq x - \pi > 0 \\ &\leq \frac{\pi}{x - \pi} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

(d) Montrons que $F(x)$ tend vers $\pi/2$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \frac{\pi}{2} \right| &\leq |F(x) - F(\alpha(x))| + \left| F(\alpha(x)) - \frac{\pi}{2} \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \int_{\alpha(x)}^x \frac{\sin t}{t} dt \right|}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\left| I_{\alpha(x)} - \frac{\pi}{2} \right|}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}}$$

3. (a) Soient x et y réels tels que $0 < x < y$. Alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \right| &= \left| \int_x^y \overbrace{\frac{1}{\sin t}}^{\text{int\`egre}} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\text{d\'erive}} dt \right| \\ &= \left| \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_x^y - \int_x^y \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos y}{y} \right| + \left| \int_x^y \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos y}{y} \right| + \int_x^y \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \left| \frac{\cos x}{x} - \frac{\cos y}{y} \right| + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ &\leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ &\leq \frac{2}{x} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ et } y \text{ sont des r\'eels tels que } 0 < x < y :} \\ \left| \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{x}$$

(b) Soit $x > 0$. Alors, pour tout $y > x$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{x}$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{\forall x > 0 \quad |l - F(x)| \leq \frac{2}{x}}$$

Partie III

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(nt) \, dt \\
 = & \int_0^\pi \underbrace{(\alpha t + \beta t^2)}_{\text{dérive}} \overbrace{\cos(nt)}^{\text{intègre}} \, dt \\
 = & \frac{1}{n} [(\alpha t + \beta t^2) \sin(nt)]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \underbrace{(\alpha + 2\beta t)}_{\text{dérive}} \overbrace{\sin(nt)}^{\text{intègre}} \, dt \\
 = & -\frac{1}{n^2} [(\alpha + 2\beta t)(-1) \cos(nt)]_0^\pi + \frac{1}{n^2} \int_0^\pi 2\beta \cos(nt) \, dt \\
 = & \frac{1}{n^2} ((-1)^n (\alpha + 2\beta\pi) - \alpha)
 \end{aligned}$$

Donc α et β sont solution du problème lorsque :

$$\begin{cases} \alpha + 2\pi\beta = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = \frac{1}{2\pi} \end{cases}$$

En conclusion :

$$\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = \frac{1}{2\pi} \text{ sont solution du problème posé.}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \cos(kt) \, dt = \frac{1}{k^2}$$

donc

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) \, dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

donc

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) \, dt = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) \, dt + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

donc

$$\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n \left(\frac{t}{2} \right) \, dt = \alpha \frac{\pi^2}{2} + \beta \frac{\pi^3}{3} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

donc

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n \left(\frac{t}{2} \right) \, dt = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2) S_n \left(\frac{t}{2} \right) \, dt = \frac{\pi^2}{3}}$$

(c) On vérifie que :

$$\forall t \in]0, \pi] \quad h(t) = \psi \left(\frac{t}{2} \right) 2(\alpha + \beta t)$$

Puisque ψ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, il en est de même pour h . En conclusion :

$$\boxed{h \text{ se prolonge en une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi].}$$

2. (a) D'après la question 1.b :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\alpha t + \beta t^2}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \, dt \\
 &= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\pi h(t) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) \, dt}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}
 \end{aligned}$$

car h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$. En conclusion :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned}
 u_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} \\
 &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 0[2]}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 1[2]}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^1 \frac{1}{(2k+1)^2} \\
 &= \frac{1}{4} u_n + v_n
 \end{aligned}$$

Donc :

$$v_n = u_{2n} - \frac{1}{4}u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{6} \frac{3}{4}$$

En conclusion :

$$\boxed{v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi^2}{8}}$$

FIN

