Compacité

Valeurs d'adhérences d'une suite

Exercice 1 [01170] [Correction]
Soit u une suite d'éléments de E. Établir que

$$\operatorname{Adh}(u)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{\{u_p \mid p\geq n\}}$$

et en déduire que $\operatorname{Adh}(u)$ est une partie fermée.

Exercice 2 [03216] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle vérifiant

$$u_{n+1}-u_n\to 0$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intervalle.

Exercice 3 [02946] [Correction]
Soit a une suite de réels telle que $a_{n+1}-a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 4 [01162] [Correction]
Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que si une suite (u_n) d'éléments de K n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors cette suite converge vers celle-ci.

Exercice 5 [03263] [Correction]
Soient $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et $u=(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)$$

On suppose que la suite u possède une unique valeur d'adhérence, montrer que celle-ci converge.

Exercice 6 [01163] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n+\frac{1}{2}u_{2n}\to 0$.
Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi.
En déduire que (u_n) converge.

Exercice 7 [02947] [Correction]
Déterminer les suites réelles bornées telle que $\left(u_n+\frac{u_{2n}}{2}\right)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 8 [03466] [Correction]
On munit $E=\mathbb{R}\left[X\right]$ des normes données par les relations

$$\|P\|_\infty=\sup_{t\in[0;1]}|P(t)| \text{ et } \|P\|_1=\int_0^1|P(t)|\,\mathrm{d}t$$

et l'on considère la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E.

a) Vérifier que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour $\|.\|_\infty$ et converge vers 0 pour la norme $\|.\|_1$.
b) Comparer $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.
c) En déduire que, bien que bornée, la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de valeur d'adhérence pour $\|.\|_\infty$.

Partie compacte

Exercice 9 [01159] [Correction]
Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA=I_n\}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10 [01160] [Correction]
Montrer que toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

Exercice 11 [01164] [Correction]
Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé E.
Établir que $K+L=\{x+y \mid x\in K, y\in L\}$ est un compact de E.

Exercice 12 [01171] [Correction]
Soient E et F deux espaces normés, A une partie fermée de E et B une partie compacte de F.
Soit $f\colon A \to B$ une application vérifiant :
— $f^{-1}(\{y\})$ est compact pour tout $y \in B$;
— l'image de tout fermé de A est un fermé de B.
Montrer que A est compact.

Exercice 13 [03271] [Correction]
[Théorème de Riesz] Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé E.

a) Montrer que pour tout $a \in E$, il existe $x \in F$ vérifiant
$$d(a, F) = \|a - x\|$$
b) On suppose $F \neq E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ vérifiant
$$d(a, F) = 1 \text{ et } \|a\| = 1$$
c) On suppose le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite (a_n) d'éléments de E vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|a_n\| = 1 \text{ et } d\left(a_{n+1}, \mathrm{Vect}(a_0, \ldots, a_n)\right) = 1$$
Conclure que la boule unité de E n'est pas compacte.

Exercice 14 [02778] [Correction]
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

a) Montrer
$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|$$
b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
c) Montrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ est une partie compacte.

Exercice 15 [03472] [Correction]
Soient K une partie compacte d'un espace de dimension finie et $r > 0$.
Montrer la compacité de la partie
$$K_r = \bigcup_{x \in K} B_f(x, r).$$

Compacité et continuité

Exercice 16 [01175] [Correction]
Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

a) Soit A une partie non vide de E. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E.
b) Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U$$

Exercice 17 [04089] [Correction]
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f\colon K \to K$ telle que
$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
a) Montrer que f possède au plus un point fixe.
b) Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que
$$\forall x \in K, \|f(x) - x\| \geq \|f(c) - c\|$$
c) En déduire que f admet un point fixe.

Exercice 18 [02775] [Correction]
Soient $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, K un compact non vide de E et $f\colon K \to K$ telle que
$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
a) Montrer qu'il existe un unique point fixe c de f sur K.
b) Soit (x_n) telle que $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in K$. Montrer que la suite (x_n) converge vers c.

Exercice 19 [01176] [Correction]
Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère une application $f\colon K \to K$ vérifiant
$$\forall x, y \in K, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 20 [02955] [Correction]
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, u dans $\mathcal{L}(E)$ et C un compact convexe non vide de E stable par u.
Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} u^i$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(C) \subset C$$

b) N désgine une norme sur E et $x \in u_n(C)$. Proposer un majorant de $N\left(x - u(x)\right)$.

c) Montrer que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(C) \neq \emptyset$$

d) Montrer que u possède un point fixe dans K.

Exercice 21 [03410] [Correction]
Soient f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et I un segment inclus dans l'image de f.
Montrer qu'il existe un segment J tel que

$$f\left(J\right) = I$$

Exercice 22 [03471] [Correction]
Soit E un espace normé et f une application vérifiant

$$\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

Soit K une partie compacte de E telle que $f(K) \subset K$.

a) Pour $x \in K$ on considère la suite récurrente (x_n) donnée par

$$x_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$$

Montrer que x est valeur d'adhérence de la suite (x_n).

b) En déduire que $f(K) = K$.

Exercice 23 [03857] [Correction]
Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.
On considère une application $f\colon K \to K$ vérifiant ρ-lipschitzienne *i.e.* vérifiant

$$\forall x, y \in K, \|f(y) - f(x)\| \leq \rho \|y - x\|$$

a) On suppose $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.

b) On suppose $\rho = 1$ et K convexe. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. On pourra introduire, pour $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n\colon x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x)$$

Exercice 24 [01173] [Correction]
Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.
Soient K un compact de E et $f\colon K \to F$ une application continue injective.

a) On pose $L = f(K)$. Montrer que L est compact.

b) Montrer que $f^{-1}\colon L \to K$ est continue.

Exercice 25 [04074] [Correction]
Soit f une fonction numérique continue sur $[0\,;+\infty[$ telle que f ait une limite finie ℓ en $+\infty$.
Démontrer que f est uniformément continue sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 26 [04103] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

a) Soit $x \in E$ et $r > 0$. Justifier que la boule $B_f(x, r)$ est compacte. Que dire de $f(B_f(x, r))$?

b) Soit $x \in E$ et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note $K = B_f(x, r)$ et on suppose $f(K) \subset K$.
On fixe $a \in K$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f^k(a)$$

Justifier que $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de K et que $f(y_n) - y_n$ tend vers 0_E. En déduire qu'il existe un vecteur $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

c) On reprend les notations précédentes et on suppose toujours $f(K) \subset K$. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp} f$ et $\operatorname{Sp} f \subset [-1;1]$.

d) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

e) Dans cette dernière question, on choisit $\dim E = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée de E et

$$K = \left\{ x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \text{ (avec } a, b, c > 0)$$

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f.

Raisonnement de compacité

Exercice 27 [01161] [Correction]
Soient K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E et $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in K$ tel que

$$d(x, K) = \|y - x\|$$

Exercice 28 [01165] [Correction]
Soient F un fermé et K un compact d'un espace vectoriel normé E.
Établir que la partie $F + K = \{x + y \mid x \in F, y \in K\}$ est fermée.

Exercice 29 [01166] [Correction]
Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$.
On forme $F = \{\lambda.x \mid \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in K\}$. Montrer que F est une partie fermée.

Exercice 30 [01167] [Correction]
Soient K et L deux compacts disjoints d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Montrer que $d(K, L) > 0$.

Exercice 31 [01174] [Correction]
Soient K et L deux compacts non vides et disjoints. Montrer

$$d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0$$

Exercice 32 [01168] [Correction]
Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E.

a) Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.

b) Y a-t-il unicité de cet élément y_0 ?

Exercice 33 [02772] [Correction]
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

son graphe.

a) On suppose f continue. Montrer que Γ_f est fermé.

b) On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.

c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 34 [01177] [Correction]
Soit $f\colon X \subset E \to F$ avec F espace vectoriel normé de dimension finie.
On suppose que f est bornée et que

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times F \mid y = f(x)\}$$

est une partie fermée de $E \times F$.
Montrer que f est continue.

Exercice 35 [03274] [Correction]
Soit A une partie bornée non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E.

a) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A.

b) On suppose l'espace E euclidien, montrer l'unicité de la boule précédente.

Exercice 36 [03305] [Correction]

a) Soit F une partie fermée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. L'ensemble $F' = \bigcup_{x \in F} \overline{B(x, 1)}$ est-il fermé ?

b) Qu'en est-il si on ne suppose plus l'espace E de dimension finie ?

Exercice 37 [02776] [Correction]
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réels, f une application de E_1 dans E_2 telle que pour tout compact K de E_2, $f^{-1}(K)$ soit un compact de E_1. Montrer, si F est un fermé de E_1, que $f(F)$ est un fermé de E_2.

Exercice 38 [01183] [Correction]
Soit (F_n) une suite décroissante de fermés non vides et bornés d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On suppose que $\delta(F_n) \to 0$ en notant

$$\delta(F_n) = \sup_{x,y\in F_n} \|y - x\|$$

Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

Exercice 39 [01179] [Correction]
Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

a) On suppose E de dimension finie. Montrer que $\bar{F} = F$.

b) On ne suppose plus E de dimension finie, montrer qu'il est possible que $\bar{F} \neq F$.

Exercice 40 [02637] [Correction]
On note $(.\mid .)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|$ la norme associée. On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x \mid y) \leq \|x\|\,\|y\|$ avec égalité si, et seulement si, x et y sont colinéaires et de même sens.

a) Soit $x, a, b \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$. Montrer que

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x - a\|$$

b) Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in F$ tel que

$$\|x - a\| = \inf_{y\in F} \|x - y\|$$

On supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général.

c) Soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $a \in A$ tel que

$$\|x - a\| = \inf_{y\in A} \|x - y\|$$

On note $a = P(x)$ ce qui définit une application $P\colon \mathbb{R}^n \to A$ appelée projection sur le convexe A.

d) Montrer que s'il existe $a \in A$ tel que $(x - a \mid y - a) \leq 0$ pour tout $y \in A$, on a $a = P(x)$.

e) On suppose qu'il existe un $y \in A$ tel que

$$(x - P(x) \mid y - P(x)) > 0$$

En considérant les vecteurs de la forme $ty + (1 - t)P(x)$ avec $t \in [0\,;1]$, obtenir une contradiction.

f) Déduire de d) et e) que $a = P(x)$ si, et seulement si, $a \in A$ et $(x - a \mid y - a) \leq 0$ pour tout $y \in A$.

g) Établir que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$(x - y \mid P(x) - P(y)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2$$

En déduire que P est continue.

Exercice 41 [04090] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ soit bornée. On étudie la suite $(B_p)_{p\geq 1}$ avec

$$B_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

a) Montrer que la suite $(B_p)_{p\geq 1}$ admet une valeur d'adhérence B.

b) Montrer que B vérifie $B(I_n - A) = O_n$ et $B^2 = B$.

c) En déduire que B est une projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$.

d) Conclure que la suite $(B_p)_{p\geq 1}$ converge vers B.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Une valeur d'adhérence appartient à chaque $\overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$ donc

$$\mathrm{Adh}(u) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$$

Inversement, pour tout $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$, on peut construire une suite extraire de u de limite ℓ : on commence par choisir n_0 tel que $N(u_{n_0} - \ell) \leq 1$ ce qui est possible car $\ell \in \overline{\{u_p \mid p \geq 0\}}$ puis une fois n_k choisit, on choisit $n_{k+1} > n_k$ de sorte que $N(u_{n_{k+1}} - \ell) \leq 1/(k+1)$ ce qui est possible puisque $\ell \in \overline{\{u_p \mid p > n_k\}}$. La suite (u_{n_k}) est alors une suite extraite de la suite u de limite ℓ.

Exercice 2 : [énoncé]
Soient $a < b$ deux valeurs d'adhérence de la suite u et $c \in]a\,;b[$. Montrons

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - c| \leq \varepsilon$$

ce qui établira que c est valeur d'adhérence de la suite u.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, u_n \notin [c-\varepsilon\,; c+\varepsilon]$$

Puisque a et b sont valeurs d'adhérence de u avec $a < c < b$, on a nécessairement

$$a < c - \varepsilon \text{ et } b > c + \varepsilon$$

Puisque $u_{n+1} - u_n \to 0$, il existe un rang N' au-delà duquel $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
Considérons alors le rang $n_0 = \max(N, N')$.
Si $u_{n_0} \leq c - \varepsilon$ alors pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n \leq c - \varepsilon$ car le saut d'un terme au terme suivant est inférieur à ε et que le segment $[c-\varepsilon\,; c+\varepsilon]$ de longueur 2ε est une zone « interdite ». Le réel b ne peut alors être valeur d'adhérence de u.
Si $u_{n_0} \geq c + \varepsilon$ alors, par le même argument, on a $u_n \geq c + \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et le réel a ne peut être valeur d'adhérence de u.
Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]
Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a.
Nous allons établir que A est un intervalle en observant que

$$\forall \alpha < \beta \in A, [\alpha\,;\beta] \subset A$$

(caractérisation usuelle des intervalles)
Soit $\alpha < \beta \in A$ et $\gamma \in [\alpha\,;\beta]$. Si $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$ alors évidemment $\gamma \in A$.
Supposons maintenant $\gamma \in]\alpha\,;\beta[$.
Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $a_{n+1} - a_n \to 0$, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon$$

Comme α est valeur d'adhérence de a et que $\alpha < \gamma$ il existe $p \geq \max(N, N')$ tel que $a_p < \gamma$. Aussi, il existe $q \geq \max(N, N')$ tel que $a_q > \gamma$.
Si $p < q$, on introduit

$$E = \{n \in [\![p\,;q]\!], a_n < \gamma\}$$

Cet ensemble E est une partie de $\mathbb{N}$, non vide (car$p \in E$) et majoré (par$q$). Cet ensemble admet donc un plus grand élément r. Nécessairement $r < q$ car $a_q \geq \gamma$.
Puisque $r \in E$ et $r+1 \notin E$, $a_r < \gamma \leq a_{r+1}$ et donc $|\gamma - a_r| \leq |a_{r+1} - a_r| \leq \varepsilon$.
Si $p > q$, un raisonnement semblable conduit à la même conclusion.
Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \geq N, |\gamma - a_r| \leq \varepsilon$$

On peut donc affirmer que γ est valeur d'adhérence de a et conclure.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de K qui n'ait qu'une seule valeur d'adhérence ℓ.
Par l'absurde supposons que (u_n) ne converge par vers ℓ. On peut écrire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Par conséquent il existe une infinité de termes de cette suite tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
À partir de ces termes on peut construire une suite extraite de (u_n) qui étant une suite d'éléments du compact K possèdera une valeur d'adhérence qui ne peut être que ℓ compte tenu de l'hypothèse.
C'est absurde, car tous ces termes vérifient $|u_n - \ell| > \varepsilon$.

Exercice 5 : [énoncé]
Notons a la valeur d'adhérence de u. Il existe une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant

$$u_{\varphi(n)} \to a$$

Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas vers a.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une infinité de terme de la suite u vérifiant

$$|u_n - a| > \varepsilon$$

Puisque $u_{\varphi(n)} \to a$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leq \varepsilon$$

Pour chaque $n \geq N$, il existe un entier $m > \varphi(n)$ tel que $|u_m - a| > \varepsilon$.
Considérons le plus petit de ces entiers m. On a par construction

$$m > \varphi(n), |u_{m-1} - a| \leq \varepsilon \text{ et } |u_m - a| > \varepsilon$$

Ce qui précède permet alors de construire une infinité de terme de la suite u appartenant à

$$K = f\left([a-\varepsilon\,;a+\varepsilon]\right) \setminus]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$$

Puisque, l'application f est continue, la partie $f\left([a-\varepsilon\,;a+\varepsilon]\right)$ est compacte et donc K l'est aussi par intersection d'une partie compacte et d'une partie fermée. La suite extraite précédente admet alors une valeur d'adhérence dans cette partie ce qui contredit l'hypothèse de travail.

Exercice 6 : [énoncé]
Posons

$$\varepsilon_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \to 0$$

Si $u_{\varphi(n)} \to a$ alors $u_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2u_{\varphi(n)} \to -2a$. Ainsi

$$a \in \mathrm{Adh}(u) \implies -2a \in \mathrm{Adh}(u)$$

Si (u_n) possède une valeur d'adhérence a autre que 0 alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-2)^k a$ est aussi valeur d'adhérence. Or ceci est impossible car (u_n) est bornée. Puisque (u_n) est bornée et que 0 est sa seule valeur d'adhérence possible, $u_n \to 0$.

Exercice 7 : [énoncé]
Posons $\ell = \lim_{n\to+\infty}\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}\ell$ de sorte que $\varepsilon_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2} \to 0$.
Soit a une valeur d'adhérence de la suite (v_n).
Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\varphi(n)} \to a$.
$v_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2v_n \to -2a$ donc $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de (v_n).
En reprenant ce processus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(-2)^p a$ est valeur d'adhérence de (v_n).
Or la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) l'est donc aussi et ses valeurs d'adhérence le sont encore. On peut donc affirmer $a = 0$.
La suite (v_n) est bornée et 0 est sa seule valeur d'adhérence donc elle converge vers 0 (car si tel n'était pas le cas, il existerait une infinité de termes de la suite (v_n) en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon\,;\varepsilon], \varepsilon > 0$, et de ces termes bornés on pourrait extraire une suite convergente d'où l'existence d'une valeur d'adhérence non nulle).

Exercice 8 : [énoncé]

a) On a

$$\|X^n\|_\infty = 1 \text{ et } \|X^n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$$

b) On vérifie $\|.\|_1 \leq \|.\|_\infty$ et ce qui précède assure aussi que ces normes ne sont pas équivalentes.

c) Par l'absurde, si la suite (X^n) possède une valeur d'adhérence P pour la norme $\|.\|_\infty$, il existe une extractrice φ telle que $\left\|X^{\varphi(n)} - P\right\|_\infty \to 0$ et alors $\left\|X^{\varphi(n)} - P\right\|_1 \to 0$. Or $\|.\|_1$ étant dominée par $\|.\|_\infty$ et la suite (X^n) convergeant vers 0 pour $\|.\|_1$, on peut affirmer $P = 0$. Or $\left\|X^{\varphi(n)} - P\right\|_\infty = \left\|X^{\varphi(n)}\right\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0. C'est absurde.

Exercice 9 : [énoncé]
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné par 1 pour la norme

$$\|A\| = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$$

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé car si $A_p \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \to A$ alors ${}^tA_pA_p = I_n$ donne à la limite ${}^tAA = I_n$

Exercice 10 : [énoncé]
Soit F une partie fermée d'un compact K. Si (x_n) est une suite d'éléments de F, alors c'est aussi une suite d'éléments de K et on peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans K. Cette suite extraite est aussi une suite convergente d'éléments du fermé F, sa limite appartient donc à F. Au final, il existe une suite extraire de (x_n) convergeant dans F.

Exercice 11 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de $K + L$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in K$ et $b_n \in L$. On peut extraire de la suite (a_n) d'éléments

du compact K, une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément de K. On peut aussi extraire de la suite $(b_{\varphi(n)})$ d'éléments du compact L, une suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ convergeant vers un élément de L. Pour l'extractrice $\theta = \varphi \circ \psi$, $(a_{\theta(n)})$ et $(b_{\theta(n)})$ convergent vers des éléments de K et L donc $(u_{\theta(n)})$ converge vers un élément de $K + L$.
Autre démonstration $K + L$ est l'image du compact $K \times L$ de E^2 par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$.

Exercice 12 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite d'éléments de A. On va établir que cette suite possède une valeur d'adhérence dans A.
On pose $F_n = \overline{\{u_p \mid p \geq n\}}$. La suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides. Posons $G_n = f(F_n)$. La suite (G_n) est une suite décroissante de fermés non vides. On peut considérer $y_n \in G_n$. La suite (y_n) possède une valeur d'adhérence y car B est compact. Pour tout $p \geq n$, on a $y_p \in G_p \subset G_n$ donc $y \in G_n$. Par suite, il existe $t_n \in F_n$ tel que $y = f(t_n)$. La suite (t_n) est une suite du compact $f^{-1}\{y\}$, elle possède donc une valeur d'adhérence t. Pour tout $p \geq n$, $t_p \in F_p \subset F_n$ donc $t \in F_n$.
Ainsi, t est une valeur d'adhérence de (u_n).

Exercice 13 : [énoncé]

a) Par caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de F vérifiant

$$\|a - x_n\| \to d(a, F)$$

La suite (x_n) est une suite bornée de l'espace vectoriel F de dimension finie, il existe donc une suite extraite de celle-ci convergeant dans F. La limite de cette suite extraite est alors un vecteur $x \in F$ vérifiant $d(a, F) = \|a - x\|$.

b) Soit a_0 un élément de E qui n'est pas dans F. Il existe $x_0 \in F$ vérifiant

$$d(a_0, F) = \|a_0 - x_0\| > 0$$

Considérons alors le vecteur

$$a = \frac{a_0 - x_0}{\|a_0 - x_0\|}$$

On a immédiatement $\|a\| = 1$ et donc

$$d(a, F) \leq \|a - 0_E\| \leq 1 \text{ car } 0_E \in F$$

De plus, pour tout $x \in F$,

$$\|a - x\| = \frac{1}{\|a_0 - x_0\|} \|a_0 - y\| \text{ avec } y = x_0 + \|a_0 - x_0\| x \in F$$

donc

$$\|a - x\| \geq \frac{1}{\|a_0 - x_0\|} d(a_0, F) = 1$$

Finalement

$$d(a, F) = 1$$

c) Il suffit de construire la suite (a_n) en partant de a_0 vecteur unitaire et, une fois les vecteurs $a_0, \ldots, a_n$ déterminés, on choisit a_{n+1} tel que

$$\|a_{n+1}\| = 1 \text{ et } d(a_{n+1}, F) = 1$$

où F désigne le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les vecteurs $a_0, \ldots, a_n$.
La suite (a_n) est alors une suite d'éléments de la boule unité fermée vérifiant

$$\forall n > m \in \mathbb{N}, \|a_n - a_m\| \geq 1$$

On ne peut extraire d'une telle suite une sous suite convergente. On en déduit que la boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 14 : [énoncé]

a) Par définition

$$d(x, F) = \inf \{\|x - y\| \mid y \in F\}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $d(x, F) + 1/(n + 1)$ ne minore par l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ et donc il existe $y_n \in F$ tel que

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n + 1}$$

En faisant varier n, cela détermine une suite (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$\|x - y_n\| \to d(x, F)$$

Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence y dans F pour laquelle on obtient

$$d(x, F) = \|x - y\|$$

b) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F. On vérifie aisément
$$d(\lambda x, F) = |\lambda|\, d(x, F)$$
car pour $\lambda \neq 0$
$$\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\} = \{\|\lambda(x - y')\| \mid y' \in F\}$$
Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x, F) = 1$.
Pour tout vecteur $y \in F$, on a aussi $d(x - y, F) = 1$ car
$$\{\|x - z\| \mid z \in F\} = \{\|x - y - z'\| \mid z' \in F\}$$
Il ne reste plus qu'à trouver $y \in F$ tel que $\|x - y\| = 1$. Le vecteur $y \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ convient. Le vecteur $u = x - y$ est alors solution.

c) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie.
Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois $u_0, \dots, u_n$ déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que
$$d(u_{n+1}, \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = \|u_{n+1}\| = 1$$
Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B, on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge
$$\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \to 0$$
or
$$\left\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\right\| \geq d(u_{\varphi(n+1)}, \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_{\varphi(n+1)-1})) \geq 1$$
C'est absurde.

Exercice 15 : [énoncé]
Puisque l'espace est dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.
Introduisons $\|.\|$ une norme sur cet espace.
Puisque K est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in K, \|x\| \leq M$$
et alors
$$\forall y \in K_r, \|y\| \leq M + r$$
La partie K_r est donc bornée.
Considérons maintenant (y_n) une suite convergente d'éléments de K_r et notons y_∞ sa limite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n \in B_f(x_n, r)$ *i.e.* $\|y_n - x_n\| \leq r$.
Puisque la partie K est compacte, on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $x_\infty \in K$.
Puisque $y_n \to y_\infty$, on a aussi $y_{\varphi(n)} \to y_\infty$ et la relation $\left\|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq r$ donne à la limite $\|y_\infty - x_\infty\| \leq r$.
Ainsi $y_\infty \in B_f(x_\infty, r)$ avec $x_\infty \in K$ donc $y_\infty \in K_r$.
La partie K_r est donc fermée et finalement c'est une partie compacte.

Exercice 16 : [énoncé]

a) Soient $x, x' \in E$.
$$\forall y \in A, \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$
donc $d(x, A) \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$ puis $d(x, A) - \|x - x'\| \leq \|x' - y\|$ et $d(x, A) - \|x - x'\| \leq d(x', A)$.
Ainsi $d(x, A) - d(x', A) \leq \|x - x'\|$ et par symétrie $|d(x, A) - d(x', A)| \leq \|x - x'\|$.
Finalement $x \mapsto d(x, A)$ est 1 lipschitzienne donc continue.

b) Considérons l'application $x \mapsto d(x, \mathcal{C}_E U)$ définie sur le compact K.
Cette application est bornée et atteint ses bornes. Posons $\alpha = \min_{x \in K} d(x, \mathcal{C}_E U)$ atteint en $x_0 \in K$.
Si $\alpha = 0$ alors $x_0 \in \overline{\mathcal{C}_E U}$ or $\mathcal{C}_E U$ est fermé et donc $x_0 \notin U$ or $x_0 \in K$.
Nécessairement $\alpha > 0$ et alors
$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U$$

Exercice 17 : [énoncé]

a) Supposons que f possède deux points fixes $x \neq y$.
L'hypothèse de travail donne
$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
ce qui est absurde si $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

b) On introduit la fonction $\delta\colon x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K.
La fonction δ est continue sur le compact K, elle admet donc un minimum en un $c \in K$ et alors
$$\forall x \in K, \delta(x) \geq \delta(c)$$

c) Par l'absurde, si $f(c) \neq c$ alors
$$\delta(f(c)) = \|f(f(c)) - f(c)\| < \|f(c) - c\| = \delta(c)$$
ce qui contredit la minimalité de c. Il reste $f(c) = c$ ce qui fournit un point fixe.

Exercice 18 : [énoncé]

a) Unicité :
Supposons que f possède deux points fixes $x \neq y$.
L'hypothèse de travail donne
$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$
ce qui est absurde si $f(x) = x$ et $f(y) = y$.
Existence :
On introduit la fonction $\delta\colon x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K.
La fonction δ est continue sur le compact K, elle admet donc un minimum en un $c \in K$.
Si $f(c) \neq c$ alors
$$\delta(f(c)) = \|f(f(c)) - f(c)\| < \|f(c) - c\| = \delta(c)$$
ce qui contredit la minimalité de c. Il reste $f(c) = c$ ce qui fournit un point fixe.

b) Introduisons $d_n = \|x_n - c\|$. La suite (d_n) est décroissante et minorée donc elle converge ; posons d sa limite. La suite (x_n) évolue dans un compact, il existe donc une extractrice φ telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un élément a de K. On a alors $d_{\varphi(n)} \to d$ et donc
$$d = \|a - c\|$$
La suite $(x_{\varphi(n)+1})$ converge vers $f(a)$ et aussi $d_{\varphi(n)+1} \to d$ donc
$$d = \|f(a) - c\| = \|f(a) - f(c)\|$$
L'hypothèse $a \neq c$ contredirait l'hypothèse faite sur f, nécessairement $a = c$ puis $d = \|a - c\| = 0$.
On peut alors conclure que (x_n) tend vers c.

Exercice 19 : [énoncé]
Unicité : Si $x \neq y$ sont deux points fixes distincts on a
$$d(x, y) = d(f(x), f(y) < d(x, y)$$
C'est exclu et il y a donc unicité du point fixe.
Existence : Considérons la fonction réelle $g\colon x \mapsto d(x, f(x))$ définie sur K. Par composition g est continue et puisque K est une partie compacte non vide, g atteint son minimum en un certain $x_0 \in K$.
Si $f(x_0) \neq x_0$ on a alors
$$g(f(x_0)) = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = g(x_0)$$
ce qui contredit la définition de x_0. Nécessairement $f(x_0) = x_0$ ce qui résout le problème.

Exercice 20 : [énoncé]

a) C est stable par tous les u^i et puisque C est convexe et que $u_n(x)$ est une combinaison convexe de $x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)$, on peut assurer que C est stable par u_n.

b) Il existe $a \in C$ tel que
$$x = u_n(a) = \frac{1}{n}\left(a + u(a) + \cdots + u^{n-1}(a)\right)$$
En simplifiant
$$x - u(x) = \frac{1}{n}\left(a - u^n(a)\right)$$
donc
$$N\left(x - u(x)\right) \leq \frac{2M}{n}$$
avec $M = \sup_{a \in C} N(a)$.

c) Puisque u_n est linéaire et continue, on peut affirmer que $u_n(C)$ est un compact convexe non vide.
De plus $u_n(C)$ est stable par u et donc pour tout naturel p, $u_p(u_n(C)) \subset u_n(C)$.
Considérons alors la suite (x_n) définie à partir de $x_0 \in C$ et de la récurrence $x_n = u_n(x_{n-1})$.
Pour tout $p \geq n$, $x_p \in u_n(C)$ compte tenu de la remarque précédente.
La suite (x_n) évoluant dans le compact C, elle admet une valeur d'adhérence x_∞.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_∞ est valeur d'adhérence de la suite $(x_p)_{p\geq n}$ d'éléments du fermé $u_n(C)$ donc $x_\infty \in u_n(C)$.
Ainsi $x_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(C)$ et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(C) \neq \emptyset$.

d) Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(C)$.
En vertu de b, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(x - u(x)) \leq \frac{2M}{n}$ donc $N(x-u(x)) = 0$ puis $u(x) = x$.

Exercice 21 : [énoncé]
Notons α, β les extrémités de I.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des antécédents de α, β respectivement. Malheureusement, on ne peut pas déjà affirmer $f([a\,;b]) = [\alpha\,;\beta]$ car les variations de f sur $[a\,;b]$ sont inconnues.
Posons

$$A = \{x \in [a\,;b] \mid f(x) = \alpha\} \text{ et } B = \{x \in [a\,;b] \mid f(x) = \beta\}$$

Considérons ensuite

$$\Delta = \{|y-x| \mid x \in A, y \in B\}$$

Δ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. On peut donc introduire sa borne inférieure m. Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe deux suites $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in B^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$|y_n - x_n| \to m$$

La partie A étant fermée et bornée, on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans A. De la suite $(y_{\varphi(n)})$, on peut aussi extraire une suite convergeant dans B et en notant x_∞ et y_∞ les limites de ces deux suites, on obtient deux éléments vérifiant

$$x_\infty \in A, y_\infty \in B \text{ et } |y_\infty - x_\infty| = \min \Delta$$

Autrement dit, on a définit des antécédents des extrémités de I dans $[a\,;b]$ les plus proches possibles.
Pour fixer les idées, supposons $x_\infty \leq y_\infty$ et considérons $J = [x_\infty\,;y_\infty]$.
On a $\alpha, \beta \in f(J)$ et $f(J)$ intervalle (car image continue d'un intervalle) donc

$$I \subset f(J)$$

Soit $\gamma \in f(J)$. Il existe $c \in J$ tel que $f(c) = \gamma$.
Si $\gamma < \alpha$ alors en appliquant le théorème de valeurs intermédiaires sur $[z\,;y_\infty]$, on peut déterminer un élément de A plus proche de y_∞ que ne l'est x_∞. Ceci contredit la définition de ces deux éléments.
De même $\gamma > \beta$ est impossible et donc $f(J) \subset I$ puis l'égalité.

Exercice 22 : [énoncé]

a) La suite (x_n) est évidemment une suite d'éléments du compact K. Elle admet donc une valeur d'adhérence $\bar{x}$ dans K et il existe une infinité de termes de la suite (x_n) au voisinage de $\bar{x}$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver une infinité de $p \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\|x_p - \bar{x}\| \leq \varepsilon/2$$

et donc une infinité de $p < q \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

Or

$$\|x_p - x_q\| = \|x_{q-p} - x\|$$

car $x_n = f^n(x)$ et que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
Ainsi, on peut trouver une infinité de $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$\|x_n - x\| \leq \varepsilon$$

b) La partie $f(K)$ est compacte en tant qu'image d'un compacte par une application continue(f est continue car lipschitzienne) donc la partie $f(K)$ est fermée. Puisque x est limite d'une suite d'éléments de $f(K)$ (au moins à partir du rang 1) on peut affirmer que $x \in f(K)$ et ainsi $K \subset f(K)$.

Exercice 23 : [énoncé]

a) La fonction f est continue car lipschitzienne. Considérons $g\colon x \in K \mapsto \|f(x) - x\|$. La fonction g est réelle, continue et définie sur un compact non vide, elle admet donc un minimum en un certain $x_0 \in K$.
Puisque

$$g(x_0) \leq g(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| \leq \rho\,\|f(x_0) - x_0\| = \rho g(x_0) \text{ avec } \rho < 1$$

On a nécessairement $g(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$ ce qui fournit un point fixe pour f.

b) Par la convexité de K, on peut affirmer que f_n est une application de K vers K.
De plus

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| = \frac{n-1}{n}\,\|f(y) - f(x)\| \leq \rho_n\,\|y - x\|$$

avec $\rho_n < 1$.

Par l'étude ci-dessus, la fonction f_n admet un point fixe x_n. La suite (x_n) est une suite du compact K, il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $x_\infty \in K$. La relation

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

donne

$$\frac{a}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(n)-1}{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

et donc à la limite

$$f(x_\infty) = x_\infty$$

Exercice 24 : [énoncé]

a) L est l'image d'un compact par une application continue donc L est compact.

b) Supposons f^{-1} non continue : $\exists y \in L, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists y' \in L$ tel que $|y'-y| \leq \alpha$ et $\left|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\right| > \varepsilon$.
Posons $x = f^{-1}(y)$ et en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ définissons $y_n \in L$ puis $x_n = f^{-1}(y_n)$ tels que $|y_n - y| \leq \frac{1}{n}$ et $|x_n - x| > \varepsilon$. (x_n) est une suite d'éléments du compact K donc elle possède une sous-suite convergente : $(x_{\varphi(n)})$. Posons $a = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \to f(a)$ or $y_n \to y$ donc par unicité de la limite $y = f(a)$ puis $a = f^{-1}(y) = x$. Ceci est absurde puisque $\left|x_{\varphi(n)} - x\right| > \varepsilon$.

Exercice 25 : [énoncé]
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$$

et alors

$$\forall x, y \in [A\,;+\infty[, |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ (*)}$$

De plus, f est continue sur $[0\,;A]$ donc uniformément continue et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0\,;A], |y-x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon (**)$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $|y-x| \leq \alpha$. On peut supposer $x \leq y$.
Si $x, y \in [0\,;A]$, on a $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ en vertu de (**)
Si $x, y \in [A\,;+\infty[$, on a à nouveau $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ cette fois-ci en vertu de (*).
Si $x \in [0\,;A]$ et $y \in [A\,;+\infty[$, on a nécessairement $|x - A| \leq \alpha$. (*) et (**) donnent alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq 2\varepsilon$$

Quitte à adapter le ε de départ, on obtient ce que l'on veut.
Autre méthode : on introduit $g = f \circ \tan$ définie sur $[0\,;\pi/2[$ que l'on prolonge par continuité en $\pi/2$. Ce prolongement est continue sur un segment donc uniformément continue. Puisque $f = g \circ \arctan$ avec arctan lipschitzienne, on obtient f uniformément continue !

Exercice 26 : [énoncé]

a) $B_f(x,r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte. L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f(B_f(x,r))$ est aussi compacte.

b) La partie K est convexe et donc $f(K)$ aussi car f est linéaire. Les vecteurs $f^k(a)$ étant tous éléments de K, la combinaison convexe définissant y_n détermine un élément de K.
Après simplification

$$f(y_n) - y_n = \frac{1}{n}\left(f^n(a) - a\right)$$

La partie K étant bornée, la suite $(f^n(a) - a)_{n\geq 1}$ l'est aussi et donc $f(y_n) - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.
Enfin, la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ évolue dans le compact K, elle admet donc une valeur d'adhérence $w \in K$:

$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} w$$

et la propriété

$$f(y_{\varphi(k)}) - y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_E$$

donne à la limite $f(w) = w$.

c) $0_E \notin K$ et donc $w \neq 0_E$. L'égalité $f(w) = w$ assure que 1 est valeur propre de f.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé avec $\|v\| < r$.
Le vecteur $x + v$ est élément de K et donc ses itérés $f^n(x+v) = f^n(x) + \lambda^n v$ le sont encore. Puisque le compact K est borné, les suites $(f^n(x+v))$ et $(f^n(x))$ le sont aussi et donc $(\lambda^n v)$ l'est encore. On en déduit $|\lambda| \leq 1$.

d) Choisissons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et cependant, en choisissant $x = (1, 0, 0)$ et $r = 1/2$, la condition $f(K) \subset K$ est remplie.

e) Puisque $f(K) = K$, les vecteurs e_1/a, e_2/b et e_3/c sont des valeurs prises par f. On en déduit que l'endomorphisme f est nécessairement bijectif.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé. Quitte à réduire la norme de v, on peut supposer $v \in K$. On a alors $f^n(v) = \lambda^n.v \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui oblige $|\lambda| \leq 1$.
Sachant $f^{-1}(K) = K$, un raisonnement symétrique donne $|\lambda| \geq 1$ et donc $|\lambda| = 1$.
Enfin, en dimension impaire, un endomorphisme réel admet nécessairement une valeur propre !

Exercice 27 : [énoncé]
Par définition
$$d(x, K) = \inf_{y \in K} \|y - x\|$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in K$ tel que
$$d(x, K) \leq \|y_n - x\| \leq d(x, K) + \frac{1}{n}$$
La suite (y_n) d'éléments du compact K admet une valeur d'adhérence $y \in K$. Il existe alors une extractrice φ telle que $y_{\varphi(n)} \to y$. Mais alors
$\left\|y_{\varphi(n)} - x\right\| \to \|y - x\|$ et
$$d(x, K) \leq \left\|y_{\varphi(n)} - x\right\| \leq d(x, K) + \frac{1}{\varphi(n)}$$
donne à la limite $\|y - x\| = d(x, K)$.
On aurait pu aussi introduire la fonction $y \mapsto \|y - x\|$ qui est continue sur un compact non vide et admet donc un minimum.

Exercice 28 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de $F + K$ de limite u. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in F$ et $b_n \in K$. La suite (b_n) étant une suite d'élément du compact K, on peut en extraire une suite convergente $(b_{\varphi(n)})$ de limite $b \in K$. La suite $(a_{\varphi(n)})$ est alors convergente de limite $a = u - b$ car $a_{\varphi(n)} = u_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)}$. Or $(a_{\varphi(n)})$ est une suite d'éléments du fermé F donc $a \in F$ et puisque $u = a + b$, $u \in F + K$. Finalement $F + K$ est fermée.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de F et posons u sa limite.
On peut écrire $u_n = \lambda_n.x_n$ avec $x_n \in K$ et $\lambda_n \geq 0$.
$0 \notin K$ donc
$$\forall \alpha > 0, B(0, \alpha) \subset C_E K$$
$\|u_n\| \to \|u\|$ et $\alpha \leq \|x_n\| \leq M$ donc (λ_n) est bornée.
Par double extraction $(x_{\varphi(n)})$ et $(\lambda_{\varphi(n)})$ convergent vers $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On a alors $u = \lambda.x$.

Exercice 30 : [énoncé]
Soient $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in L^{\mathbb{N}}$ telles que
$$d(K, L) = \inf_{(x,y) \in K \times L} d(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$
On peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ et on peut extraire de $(y_{\varphi(n)})$ une suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})$.
Pour $x = \lim x_{\varphi(n)} \in K$ et $y = \lim y_{\varphi(\psi(n))} \in L$ on a
$$d(K, L) = d(x, y) > 0$$
car $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 31 : [énoncé]
L'application $x \mapsto d(x, L) = \inf_{y \in L} \|y - x\|$ est une fonction réelle continue sur le compact K donc admet un minimum en un certain $a \in K$. Or $y \mapsto \|y - a\|$ est une fonction réelle continue sur le compact L donc admet un minimum en un certain $b \in L$. Ainsi
$$d(K, L) = \inf_{x \in K} \inf_{y \in L} \|y - x\| = \inf_{y \in L} \|y - a\| = \|b - a\| > 0$$
car $a \neq b$ puisque $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 32 : [énoncé]

a) Posons $d = d(x, F)$.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in F, \|x - x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$$
Cela permet de définir une (x_n) bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont on note $\bar{x}$ la limite. On a $\bar{x} \in F$ car F est une partie fermée et puisque $\|x - x_n\| \to d$ on obtient $\|x - \bar{x}\| = d$.

b) Non, prendre $x = 0$ et F l'hypersphère unité.

Exercice 33 : [énoncé]

a) Soit $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de Γ_f. On suppose que la suite $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ converge vers (x_∞, y_∞). Puisque $y_n = f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty = f(x_\infty)$ car f est continue.
La partie Γ_f est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et $(y_n) = (f(x_n))$ son image.
Soit b une valeur d'adhérence de (y_n). Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$y_{\varphi(n)} \to b$$
On a alors
$$\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) \to (a, b)$$
Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a, b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.
Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.
Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a.

c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par
$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés
$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$
mais cette fonction n'est pas continue.

Exercice 34 : [énoncé]
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in X$ et $(y_n) = (f(x_n))$ son image.
Soit b une valeur d'adhérence de (y_n). Il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$y_{\varphi(n)} \to b$$
On a alors
$$\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right) \to (a, b)$$
Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a, b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.
Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.
Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a.

Exercice 35 : [énoncé]

a) Soit $a \in E$. Puisque la partie A est bornée et non vide, l'ensemble $\{\|x - a\| \mid x \in A\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ ce qui permet d'introduire
$$R_a = \sup_{x\in A} \{\|x - a\| \mid x \in A\}$$
Il est immédiat que $A \subset \bar{B}(a, R_a)$ et que R_a est le rayon minimal d'une boule fermée de centre a contenant la partie A.
L'ensemble $\{R_a \mid a \in E\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on peut donc introduire
$$R = \inf \{R_a \mid a \in E\}$$
Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe une suite (a_n) d'éléments de E telle que
$$R_{a_n} \to R$$
Soit $x_0 \in A$. Puisque $A \subset \bar{B}(a_n, R_{a_n})$, on a
$$\|x_0 - a_n\| \leq R_{a_n}$$
et donc
$$\|a_n\| \leq \|x_0\| + \|x_0 - a_n\| \leq \|x_0\| + R_n \to \|x_0\| + R$$
ce qui permet d'affirmer que la suite (a_n) est bornée. Puisque $\dim E < +\infty$, on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dont on notera a la limite.
Soit $x \in A$. Puisque
$$\|x - a_n\| \leq R_{a_n}$$
on obtient à la limite
$$\|x - a\| \leq R$$

et donc $A \subset \bar{B}(a, R)$.
Enfin, par construction, $\bar{B}(a, R)$ est une boule de rayon minimal contenant la partie A (en s'autorisant de parler de boule fermée de rayon nul dans le cas où $R = 0$).

b) On suppose ici l'espace E euclidien.
Supposons $\bar{B}(a, R)$ et $\bar{B}(a', R)$ solutions et montrons $a = a'$.
Posons

$$b = \frac{1}{2}(a + a')$$

En vertu de l'identité du parallélogramme

$$\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2\right)$$

appliquée à

$$\alpha = x - b \text{ et } \beta = \frac{a - a'}{2}$$

on obtient pour tout $x \in A$

$$\|x - b\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x - a\|^2 + \|x - a'\|^2\right) \leq R^2$$

et donc

$$\|x - b\| \leq \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}$$

Ainsi

$$R_b \leq \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}$$

Or par définition de R, on a aussi $R_b \geq R$ et donc on peut affirmer $\|\beta\| = 0$ *i.e.* $a = a'$.

Exercice 36 : [énoncé]

a) Soit (u_n) une suite convergente d'élément de F' de limite u_∞.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que

$$\|u_n - x_n\| \leq 1$$

Puisque la suite (u_n) converge, elle est bornée et donc la suite (x_n) l'est aussi.
Puisque l'espace E est de dimension finie, on peut extraire une suite convergente de la suite (x_n). Notons-la $(x_{\varphi(n)})$. La limite x_∞ de cette suite extraite appartient à F car F est une partie fermée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left\|u_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right\| \leq 1$$

donc à la limite

$$\|u_\infty - x_\infty\| \leq 1$$

et donc $u_\infty \in F'$.
Ainsi la partie F' est fermée.

b) Supposons $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

Posons

$$F = \left\{\frac{n+1}{n} X^n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \frac{1}{n} X^n = \frac{n+1}{n} X^n - X^n \in F'$$

et

$$P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0 \notin F'$$

donc la partie F' n'est pas fermée.

Exercice 37 : [énoncé]
Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite y_∞. On veut établir que $y_\infty \in f(F)$. Si y_∞ est l'un des éléments de la suite (y_n) l'affaire est entendue. Sans perte de généralités, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq y_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = f(x_n)$. L'ensemble $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ est un compact de E_2 donc $f^{-1}(K)$ est un compact de E_1. La suite (x_n) apparaît comme étant une suite d'éléments du compacte $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergeant dans la partie $x_{\varphi(n)} \to x_\infty \in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé F, on peut affirmer $x_\infty \in F$. On va maintenant établir $y_\infty = f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $K_N = \{y_n \mid n \geq N\} \cup \{y_\infty\}$. K_N est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty \in f^{-1}(K_N)$. Ainsi, $x_\infty \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1}\left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N\right)$. Or $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N = \{y_\infty\}$ donc $f(x_\infty) = y_\infty$.

Exercice 38 : [énoncé]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, introduisons $x_n \in F_n$. Ceci définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cette suite est une suite d'éléments de la partie F_0 qui est bornée, on peut donc en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Posons ℓ sa limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir d'un certain rang k_0, on a $\varphi(k) \geq n$ et donc

$$x_{\varphi(k)} \in F_{\varphi(k)} \subset F_n$$

La suite $(x_{\varphi(k)})_{k\geq k_0}$ est une suite convergente d'éléments de F_n. On a alors $\ell \in F_n$ car F_n est une partie fermée.
On en déduit

$$\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x, \ell \in F_n$ donc

$$\|x - \ell\| \leq \delta(F_n)$$

Or $\delta(F_n) \to 0$ donc $x = \ell$.
Finalement

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{\ell\}$$

Exercice 39 : [énoncé]

a) Si E est de dimension finie alors F est fermé car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé. On en déduit $F = \bar{F}$.

b) Il suffit de considérer un sous-espace vectoriel dense comme par exemple l'espace des fonctions polynômes de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ dense dans celui des fonctions continues de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{K}$ normé par $\|.\|_\infty$.

Exercice 40 : [énoncé]

a)

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|x-a\|^2 + \frac{1}{4}\|x-b\|^2 + \frac{1}{2}(x-a \mid x-b) \leq \|x-a\|^2$$

De plus s'il y a égalité, $x-a$ et $x-b$ sont colinéaires et ont même sens, or ces vecteurs ont même norme, ils sont dès lors égaux ce qui est exclu puisque $a \neq b$.

b) Cas F borné (donc compact).
Il existe $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\|x - y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf_{y\in F} \|x-y\|$$

Pour a valeur d'adhérence de (y_n), on a par passage à la limite

$$\|x-a\| = \inf_{y\in F} \|x-y\|$$

Cas général. Posons $d = \inf_{y\in F} \|x-y\|$ et $F' = F \cap \overline{B}(x, d+1)$.
F' est fermé et borné donc il existe $a \in F'$ tel que $\|x-a\| = \inf_{y\in F'} \|x-y\|$.
Or par double inégalité $\inf_{y\in F'} \|x-y\| = \inf_{y\in F} \|x-y\|$ et $a \in F$ donc il existe $a \in F$ tel que voulu.

c) L'existence est assuré par b. Pour l'unicité, supposons par l'absurde l'existence de $a \neq b$ solutions.
Par a), on a

$$\left\|x - \frac{a+b}{2}\right\| < \|x-a\|$$

avec $\frac{a+b}{2} \in A$ car A convexe. Cela contredit la définition de a.

d)

$$\|x-y\|^2 = \|x-a\|^2 + 2(x-a \mid a-y) + \|a-y\|^2 \geq \|x-a\|^2$$

avec $a \in A$ donc $a = P(x)$.

e)

$$\begin{aligned}\|x - (ty + (1-t)P(x))\|^2 &= \|x - P(x) - t(y - P(x))\|^2 \\ &= \|x - P(x)\| - 2t(x - P(x) \mid y - P(x)) + t^2\|y - P(x)\|^2\end{aligned}$$

or

$$-2t(x - P(x) \mid y - P(x)) + t^2\|y-P(x)\|^2 \underset{t\to 0}{\sim} -2t(x - P(x) \mid y - P(x))$$

est strictement négatif au voisinage de zéro.
Pour t suffisamment petit, $ty + (1-t)P(x)$ est un vecteur du convexe A contredisant la définition de a.

f) Par d), on a $\Longleftarrow$. Par e., on a $\Longrightarrow$ via contraposée.

g)

$$\begin{aligned}(x-y \mid P(x)-P(y)) &= (x-P(x) \mid -P(y)) \\ &+ \|P(x)-P(y)\|^2 + (P(y)-y \mid P(x)-P(y))\end{aligned}$$

avec

$$(x - P(x) \mid -P(y)) = -(x - P(x) \mid -P(x)) \geq 0$$

et
$$(P(y) - y \mid P(x) - P(y)) = -(y - P(y) \mid -P(y)) \geq 0$$
donc
$$(x - y \mid P(x) - P(y)) \geq \|P(x) - P(y)\|^2$$
Par Cauchy-Schwarz
$$\|P(x) - P(y)\|^2 \leq \|x - y\| \, \|P(x) - P(y)\|$$
Pour $P(x) \neq P(y)$, $\|P(x) - P(y)\| \leq \|x - y\|$ et pour $P(x) = P(y)$ aussi.
P est donc continue car lipschitzienne.

Exercice 41 : [énoncé]

a) Posons $M \in \mathbb{R}_+$ vérifiant
$$\forall p \in \mathbb{N}, \|A^p\| \leq M$$
On vérifie alors
$$\forall p \in \mathbb{N}, \|B_p\| \leq M$$
La suite $(B_p)_{p\geq 1}$ est bornée en dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence.

b) Par télescopage
$$B_p(I_n - A) = \frac{1}{p}(I_n - A^p)$$
et donc
$$\|B_p(I_n - A)\| \leq \frac{1+M}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$
Ainsi $B_p(I_n - A) \xrightarrow[p\to+\infty]{} O_n$. En raisonnant par la suite extraite $\left(B_{\varphi(p)}\right)$ convergeant vers B, on obtient par unicité de la limite
$$B(I_n - A) = O_n$$
On en déduit $B = BA$ puis $B = BA^k$ et $BB_p = B$. En raisonnant par la suite extraite $\left(B_{\varphi(p)}\right)$ convergeant vers B, on obtient $B^2 = B$.

c) B est une projection puisque $B^2 = B$.
Pour $X \in \ker(A - I_n)$, on a $AX = X$ et donc $B_pX = X$ puis, par limite de $\left(B_{\varphi(p)}\right)$, on obtient $BX = X$.
Ainsi $\ker(A - I_n) \subset \operatorname{Im} B$.
Pour $Y \in \operatorname{Im}(A - I_n)$, on peut écrire $Y = AX - X$ et alors
$BY = BAX - BX = 0$.
Ainsi $\operatorname{Im}(A - I_n) \subset \ker B$.
Par la formule du rang
$\dim\ker(A - I_n) + \dim\operatorname{Im}(A - I_n) = n = \dim\operatorname{Im} B + \dim\ker B$ et donc $\ker(A - I_n) = \operatorname{Im} B$ et $\operatorname{Im}(A - I_n) = \ker B$. On peut alors conclure que B est la projection affirmée.

d) La valeur d'adhérence B est finalement déterminée de manière unique.
Puisque la suite $(B_p)_{p\geq 1}$ est bornée et n'admet qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.