

# Probab (Partie 2)

Ex 1 Considérons les événements suivants:

$I_k$ : "Ali emprunte l'itinéraire  $I_k$ "

$H$ : "Ali arrive à l'heure"

On veut calculer:  $P(I_1/H)$ , via d'après Bayes:  $P(I_1/H) = \frac{P(H/I_1) \cdot P(I_1)}{\sum_{k=1}^3 P(H/I_k) \cdot P(I_k)}$

et on a:  $P(I_k) \stackrel{\forall 1 \leq k \leq 3}{=} \frac{1}{3}$

$$P(H/I_1) = 1$$

$$P(H/I_2) = 3/4$$

$$P(H/I_3) = 2/3, \text{ remplacer } \dots$$

Ex 2: (Les jours commencent de  $k=0$ )

o)  $\pi_0 = 0$  (le jour 0, la place est libre)

$$\pi_1 = P(R_1)$$

avec:  $R_k$ : "La place est réservée le jour  $k$ "

et le jour 0, la place est libre, alors

$$P(R_1) = 4/10 \Rightarrow \pi_1 = 4/10, \pi_0 = 0$$

$$1) \pi_{k+1} = P(R_{k+1})$$

$$= P(R_{k+1}/R_k) \cdot P(R_k) + P(R_{k+1}/\bar{R}_k) \cdot P(\bar{R}_k)$$

$$\Rightarrow \pi_{k+1} = \frac{1}{2} \pi_k + \frac{2}{5} \quad (\text{pour tout } k \geq 0)$$

2)  $(\pi_k)_{k \geq 0}$  est une suite arithmético-géométrique

$$\rightarrow l = \frac{1}{2} l + \frac{2}{5} \Leftrightarrow l = \frac{4}{5}$$

$\rightarrow$  La suite  $(\pi_k - l)_{k \geq 0}$  est géométrique

de raison  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{Donc: } \forall k \in \mathbb{N}, \pi_k - \frac{4}{5} = (\pi_0 - \frac{4}{5}) \cdot (\frac{1}{2})^k$$

$$\% : \forall k \geq 0, \pi_k = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot (\frac{1}{2})^k$$

$$ii) \lim_n \pi_n = \frac{4}{5}$$

Ex 3:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & \bar{B}_1 \\ \hline 13 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline B_2 & \bar{B}_2 \\ \hline 10 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$$1) P(B_1) = P(B_1/U_1)P(U_1) + P(B_2/U_2)P(U_2) = \frac{13}{18} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{22} \cdot \frac{1}{2} = \frac{233}{396}$$

$$P(B_2) = P(B_2/B_1)P(B_1) + P(B_2/\bar{B}_1)P(\bar{B}_1) = \frac{13}{18} \cdot \frac{233}{396} + \frac{10}{22} \cdot \frac{163}{396} = \frac{47989}{78408}$$

$$2) P(B_n) = P(B_n/B_{n-1})P(B_{n-1}) + P(B_n/\bar{B}_{n-1})P(\bar{B}_{n-1})$$

$$\Rightarrow P(B_n) = \frac{53}{198} P(B_{n-1}) + \frac{5}{11}$$

3) Notons  $P(B_n) = \pi_n$ , pour tout  $n \geq 1$ .

$$i) \text{ On a: } \forall n \geq 1, \pi_n = \frac{53}{198} \pi_{n-1} + \frac{5}{11}$$

C'est une suite arithmético-géométrique (encore)

$$\rightarrow \text{Point fixe: } l = \frac{53}{198} l + \frac{5}{11} \Leftrightarrow l = \frac{18}{29}$$

$\rightarrow$  La suite  $(\pi_n - l)_{n \geq 1}$  suite géométrique

de raison  $\frac{53}{198}$ .

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \pi_n = \frac{18}{29} - \frac{371}{11484} \cdot (\frac{53}{198})^{n-1}$$

$$ii) \lim_n \pi_n = \frac{18}{29}$$

iii) Interprétation: après un nombre assez grand de tirages, on a 62% de chance pour tirer une boule blanche.

Ex 4:

$$1) a) ii) P_{n+1} = P(M_{n+1})$$

$$= P(M_{n+1}/M_n)P(M_n) + P(M_{n+1}/S_n)P(S_n) + P(M_{n+1}/B_n)P(B_n)$$

$$\Rightarrow P_{n+1} = (1-2a)P_n + aq_n + ar_n$$

$$(i) q_{n+1} = P(S_{n+1})$$

$$= \underbrace{P(S_{n+1}/M_n)}_a \underbrace{P(M_n)}_{p_n} + \underbrace{P(S_{n+1}/S_n)}_{(1-2a)} \underbrace{P(S_n)}_{q_n} + \underbrace{P(S_{n+1}/B_n)}_a \underbrace{P(B_n)}_{r_n}$$

$$\text{D'où } q_{n+1} = a p_n + (1-2a) q_n + a r_n$$

$$(b) p_n + q_n + r_n = 1 \Rightarrow r_n = 1 - p_n - q_n$$

$$2) p_{n+1} = (1-2a) p_n + a q_n + a r_n = (1-3a) p_n + a$$

$$\text{et de même } q_{n+1} = (1-3a) q_n + a$$

$$3) i) (p_{n+1} = (1-3a) p_n + a, \forall n \geq 1) \text{ et } (p_1 = 0)$$

$$\text{On a : } l = (1-3a) l + a \Leftrightarrow l = \frac{a}{1-3a}$$

et  $(p_n - l)_{n \geq 1}$  géométrique de raison  $(1-3a)$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, p_n - \frac{1}{3} = \left( p_1 - \frac{1}{3} \right) \cdot (1-3a)^{n-1} = -\frac{1}{3} \cdot (1-3a)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (1-3a)^{n-1}$$

ii) avec  $q_1 = 1$ , on trouve de même :

$$\forall n \geq 1, q_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} (1-3a)^{n-1}$$

iii) On déduit que :

$$\forall n \geq 1, r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} (1-3a)^{n-1}$$

$$iv) \text{ On a } 0 < a < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < 1-3a < 1$$

$$\text{D'où } (1-3a)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_n p_n = \lim_n q_n = \lim_n r_n = \frac{1}{3}$$

v) Interprétation: Après un assez grand nombre de jours, le titre aura les mêmes chances de monter, se stabiliser ou baisser (soit 33,33%)

partie 2, page 2

6x5 :

$$1) \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{cases}, \text{ car à } t=0, \text{ la quôte est en A.}$$

$$\begin{cases} a_1 = P(A_1) = 1/3 \\ b_1 = P(B_1) = 2/3 \\ s_1 = P(S_1) = 0 \end{cases}$$

$$2) a) i) a_{n+1} = P(A_{n+1})$$

$$= \underbrace{P(A_{n+1}/A_n)}_{1/3} \underbrace{P(A_n)}_{a_n} + \underbrace{P(A_{n+1}/B_n)}_{1/4} \underbrace{P(B_n)}_{b_n} + \underbrace{P(A_{n+1}/S_n)}_{=0} \underbrace{P(S_n)}_{s_n}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{4} b_n$$

$$ii) b_{n+1} = P(B_{n+1})$$

$$= \underbrace{P(B_{n+1}/A_n)}_{2/3} \underbrace{P(A_n)}_{a_n} + \underbrace{P(B_{n+1}/B_n)}_{1/2} \underbrace{P(B_n)}_{b_n} + \underbrace{P(B_{n+1}/S_n)}_{=0} \underbrace{P(S_n)}_{s_n}$$

$$\Rightarrow b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{2} b_n$$

$$b) u_{n+1} = \frac{6}{10} a_{n+1} - \frac{3}{10} b_{n+1}$$

$$= \frac{6}{10} \left( \frac{a_n}{3} + \frac{b_n}{4} \right) - \frac{3}{10} \left( \frac{2a_n}{3} + \frac{b_n}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, u_n = 0 \quad ; \quad u_0 \text{ trouve } 3/5$$

$$c) i) v_{n+1} = \dots = \frac{5}{6} v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$ii) \left( \forall n \geq 0, v_n = \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^n \right) ; (v_0 = 2/5)$$

$$d) \forall n \geq 1, \begin{cases} u_n = 0 \\ v_n = \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \begin{cases} \frac{6}{10} a_n - \frac{3}{10} b_n = 0 \\ \frac{4}{10} a_n + \frac{3}{10} b_n = \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 1, \begin{cases} a_n = \frac{2}{5} \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^n \\ b_n = \frac{4}{5} \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^n \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases}$$

$$3) i) s_n = P(S_n) =$$

$$= \underbrace{P(S_n/B_{n-1})}_{1/4} \underbrace{P(B_{n-1})}_{b_{n-1}} + \underbrace{P(S_n/A_{n-1})}_{=0} \underbrace{P(A_{n-1})}_{a_{n-1}} + \underbrace{P(S_n/S_{n-1})}_{1} \underbrace{P(S_{n-1})}_{s_{n-1}} = \frac{1}{4} b_{n-1} + s_{n-1}$$

$$\textcircled{\text{ii}} \quad \forall n \geq 2, S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4} b_{n-1}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2, \underbrace{\sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1})}_{= S_n - S_1 \text{ (téléscopie)}} = \frac{1}{4} \sum_{k=2}^n b_{k-1}$$

$$\text{donc: } \sum_{k=2}^n b_{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{5}{6}\right)^k$$
$$= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2, S_n = \underbrace{S_1}_{=0} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}{\frac{1}{6}}$$

$$\text{Enfin: } \boxed{\forall n \geq 2, S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

$$\textcircled{\text{iii}} \quad \lim_n S_n = 1$$

$\textcircled{\text{iv}}$  Interprétation:

Pour un temps assez grand, la guêpe finira par se libérer

%