Extrait

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille de nombres réels telle que la famille $(n^6a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit sommable.

3.1. Une question de sommabilité

3.1.1. Montrer que la famille $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| \leqslant \sqrt{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}.$$

3.1.2. En déduire que les familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables.

Rappel : La famille $(n^2a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et ssi :

Il existe $C>0$ tel que pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}$ on a :

$$\sum_{n\in J}|n^2a_n| \leqslant C$$

→ Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n^2a_n| \leqslant C$$

(3.1.1)

Soit J une partie finie de $\mathbb{Z}^*$. On a :

$$\sum_{n\in J}|n^2a_n| = \sum_{n\in J} n^3|a_n|\cdot\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in J}|n^2a_n| \leqslant \Big(\sum_{n\in J}(n^3|a_n|)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\sum_{n\in J}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Et on a $\displaystyle\sum_{n\in J}(n^3|a_n|)^2 = \sum_{n\in J} n^6a_n^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6a_n^2$

Car $(n^6a_n^2)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille sommable.

et $\displaystyle\sum_{n\in J} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}$.

Car $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sommable, puis que $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}^-_*}$ Sommables, du fait que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est une série Convergente.

D'autre part :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^{-*}} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n)^2}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et $\displaystyle\sum_{n\in J} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \Longrightarrow \left(\sum_{n\in J} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ainsi $\displaystyle\sum_{n\in J} |n^2 a_n| \leqslant \left(\sum_{n\in J} \left(n^3|a_n|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n\in J} \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ devient :

$$\sum_{n\in J} n^2|a_n| \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et ceci pour toute partie finie J de $\mathbb{Z}^*$.

Or pour toute partie finie K de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{n\in K} n^2|a_n| = \sum_{n\in K\setminus\{0\}} n^2|a_n| \quad \text{et} \quad (K\setminus\{0\}) \subset \mathbb{Z}^*$$

Alors pour toute partie finie K de $\mathbb{Z}$, on a :

$$\sum_{n\in K} n^2 |a_n| \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et qu'on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |a_n| \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\square$

3.1.1. Montrer que la famille $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|a_n| \leqslant \sqrt{2}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^6 a_n^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}.$$

3.1.2. En déduire que les familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables.

3.1.2)

i) $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommable ; en effet :

On a $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{Z}^*, \ |a_n| \leqslant n^2|a_n| \\ \text{et } (n^2|a_n|)_{n\in\mathbb{Z}^*} \text{ sommable} \end{cases}$

D'où $(|a_n|)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ sommable

et donc $(|a_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$, càd $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommable. $\square$

ii) $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sommable ; en effet :

On a $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{Z}, \ |na_n| \leqslant |n^2a_n| \\ \text{et } (|n^2a_n|)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ sommable} \end{cases}$

D'où $(|na_n|)_{n\in\mathbb{Z}}$, càd $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. $\square$