CONCOURS COMMUN INP 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE I

Q1. On utilisant la formule du produit matriciel, la fonction **produit (A,B)** qui renvoie AB peut être définie comme suit :

```python
def produit(A, B):
    if len(A) != len(B[0]) or len(A[0]) != len(B):
        print("Les dimensions des matrices sont incompatibles.")
        return None
    n = len(A)
    C = [[0]*n for i in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            for k in range(n):
                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
    return C
```

Q2. Un graphe est non orienté si, et seulement si, sa matrice d'adjacence est symétrique. La fonction oriente(A) qui retourne True si le graphe est orienté et False sinon peut être définie comme suit :

```python
def oriente(A):
    n = len(A)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if A[i][j] != A[j][i]:
                return True
    return False
```

Q3. En utilisant le résultat admis, la fonction **distance(A,i,j)** qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour atteindre le sommet j depuis le sommet i peut être définie comme suit :

```python
def distance(A, i, j):
    p = 1
    B = A
    while B[i][j] == 0:
        B = produit(A, B)
        p = p + 1
    return p
```

Q4. La requête SQL pour extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de "Toulouse" est :

```sql
SELECT id FROM CLIENTS WHERE ville = 'Toulouse';
```

Q6. La requête SQL pour extraire les emails de tous les clients ayant "SCEI" comme partenaire est :

```sql
SELECT email FROM CLIENTS
WHERE id IN (SELECT id_client FROM PARTENAIRES WHERE partenaire = 'SCEI');
```

EXERCICE II

On définit la fonction $f:(x,y)\mapsto x^2-2xy+2y^2+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Q6. Soit $\varphi : x\mapsto x-e^{-x}$, on a $\varphi'(x)=1+e^{-x}$, donc φ est strictement croissante et $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaire (généralisé) donne φ admet une unique solution, α sur $\mathbb{R}$.

De plus on a $\varphi(0)=-1$ donc α est strictement positive .

Q7. (x,y) est poit critique de f si et seulement si il annule les dérivées partielles de f , il est donc solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x-2y-e^{-x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-2x+4y=0\end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x=2y\\ x-e^{-x}=0\end{cases}$$

Donc f possède un unique point critique $(\alpha,\frac{\alpha}{2})$, *(α l'unique solution de l'équation $x=e^{-x}$)* .

Q8. La matrice hessienne de f et (x,y) est donnée par

$$H_f(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x,y)\right)_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}=\begin{pmatrix}2+e^{-x} & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

donc

$$H_f\left(\alpha,\frac{\alpha}{2}\right)=\begin{pmatrix}2+\alpha & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable , elle admet deux valeurs propres réelles λ et μ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda\mu=\det H_f\left(\alpha,\frac{\alpha}{2}\right)=4(\alpha+1)\\ \lambda+\mu=\operatorname{Tr}H_f\left(\alpha,\frac{\alpha}{2}\right)=\alpha+6\end{cases}$$

α est strictement positive donc $\lambda\mu>0$ et $\lambda+\mu>0$, par conséquent $\lambda>0$ et $\mu>0$, ainsi est définie positive et $(\alpha,\frac{\alpha}{2})$ est un minimum local.

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. On pose :

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(\alpha)=\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Par comparaison aux intégrales de Riemann , on a

▷ $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}$ et $1-\alpha \in]0,1[$ donc $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

▷ $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x} \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2-\alpha}}$ et $2-\alpha \in]1,2[$ donc $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q10. Par le changement de variables $t=\dfrac{1}{x}$, dans $J(\alpha)$,on obtient :

$$J(\alpha)=\int_0^1 \frac{t^{-\alpha+1}}{1+\frac{1}{t}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t}\,\mathrm{d}t=I(1-\alpha)$$

Q11. <u>1^{re}tentative</u> :

▷ Soit $x\in]0,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ donc :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{\alpha+n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

▷ On a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f_n(x)=(-1)^n$, et la série $\sum(-1)^n$ diverge , le théorème d'interversion de limite et $\sum$ assure que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0,1[$.

Q12. <u>2^{e}tentative</u> :

▷ On a

- (S_n) converge simplement, sur $]0,1[$, vers $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ qui est intégrable sur $]0,1[$.

- Les fonctions f_n sont intégrable sur $]0,1[$.

- Pour tout $x\in]0.1[$, on a :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{k+\alpha-1}=\frac{x^{\alpha-1}(1-(-x)^{n+1})}{1+x}$$

donc

$$|S_n(x)|\leq \frac{x^{\alpha-1}(1+x^{n+1})}{1+x}\leq 2\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

la fonction $x\mapsto \dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0.1[$.
Le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(x)\mathrm{d}x=I(\alpha)$$

Qui s'écrit

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$$

▷ On a

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)^n x^{n+\alpha-1}\mathrm{d}x \ = \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

donc

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Q13. D'après la question Q10 on a

$$J(\alpha) = I(1-\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$$

donc :

$$\begin{aligned}
I(\alpha)+J(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha} \\
&= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}.$$

Q14. On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha\cos(nx)}{\alpha^2-n^2}\right).$$

Pour $x=0$ on a

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\right).$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma .

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in \left]0,+\infty\right[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

et

$$\forall x \in \left[0,+\infty\right[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\,dt$$

Q15. Par comparaison aux intégrales de Riemann , on a

$\triangleright$ $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $1-\alpha \in]-\infty, 1[$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

$\triangleright$ $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x \in]0,+\infty[$, par suite Γ est bien définie sur $]0,+\infty[$.

Q16. Par comparaison on a

$$\left|\frac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}\right| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$$

$\triangleright$ La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après Q9) donc $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout x dans $[0,+\infty[$. Ainsi f_α est bien définie sur $[0,+\infty[$.

$\triangleright$ La fonction $(x,t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}$ est continue sur $[0,+\infty[\times$ et elle est dominée par une fonction intégrable $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ sur $]0,+\infty[$, donc f_α est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Q17. La fonction $g : (x,t) \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ *(théorème des opérations élémentaires)* et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{t^{\alpha}}{t+1}e^{-xt}$$

Pour tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ ($a < b$) on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t^{\alpha}}{t+1}e^{-at} = \varphi(t)$$

puisque $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$ et $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(\dfrac{1}{t^2})$ alors φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, donc f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, pour tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$, par suite elle est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha}}{t+1}e^{-xt}\, dt$$

Q18. Soit (u_n) une suite $]0,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$, on a alors :

$\triangleright$ La suite de fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-u_n t}$ converge simplement vers 0 sur $]0,+\infty[$.

$\triangleright$ La fonction $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}e^{-u_n t}$ dominée la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ qui est intégrable $]0,+\infty[$ Le théorème de convergence dominée donne $\lim\limits_{n\to\infty} f_\alpha(u_n) = 0$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite on a $\lim\limits_{x\to\infty} f_\alpha(x) = 0$.

Q19. Par comparaison aux intégrales de Riemann , on a

$\triangleright$ $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha \in]0,1[$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$.

$\triangleright$ $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ pour tout $\alpha \in]0,1[$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $\alpha \in]0,1[$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ et

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t - \int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} 0$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\mathrm{d}t = 0$$

Partie III - Vers la formule des compléments .

Q20. Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}\ dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt}\ dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt}\ dt \\ &\underset{u=tx}{=} \int_0^{+\infty} (\frac{u}{x})^{\alpha-1} e^{-u}\ \frac{du}{x} \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\ du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Q21. Soit $x \in]0,+\infty[$, on a :$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \left(e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t + e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t \right)' \right)$$

écrivons $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t \right)' = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$, par suite

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha) \left(e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t - \frac{1}{x^\alpha} \right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

g_α est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$ (E).
D'après la question Q20 f_α est solution de (E) sur $]0,+\infty[$, donc

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = g_\alpha(x) - g'_\alpha(x)$$

par suite

$$(f_\alpha(x) - g_\alpha(x))' = f_\alpha(x) - g_\alpha(x)$$

et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0,+\infty[\ ,\ f_\alpha(x) - g_\alpha(x) = \lambda e^x$$

On a de plus

$$\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} e^{-x} g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \lim_{x\to\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t = 0.$$

ce qui donne $\lambda = 0$ et $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. f_α et g_α sont prolongeables par continuité en 0 , donc $\lim\limits_{x\to\infty} f_\alpha(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g_\alpha(x)$, ainsi on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t$$

Q23. D'après Q14 on a $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$, de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1} e^{-t} \mathrm{d}t = \Gamma(1-\alpha)$$

D'après Q22 on a :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad \textit{(formule des compléments)}$$

Q24. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ converge , on obtient par le changement de variable $u = t^2$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$$

la formule des compléments pour $\alpha = \frac{1}{2}$ donne $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ainsi

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Fin.