المملكة المغربية

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Enseignement Supérieur de la Recherche
Scientifique de la Formation des Cadres

Présidence du Concours National Commun
École Nationale Supérieure des Mines de Rabat

CONCOURS NATIONAL COMMUN
d'admission aux Établissements de Formation d'Ingénieurs et
et Établissements Assimilés

Session 2016

ÉPREUVE DES MATHÉMATIQUES I

Filière MP

Durée 4 heures

cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est interdit

Problème 2

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé, par la suite, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles discrètes ou àă densité. Si X est une variable aléatoire sur (Ω, A, P), la fonction génératrice des moments de X, lorsqu'elle existe, est la fonction numérique de la variable réelle t, $M_X : t \to E(e^{tX})$, où $E(e^{tX})$ désigne l'espérance de la variable aléatoire e^{tX}.

Partie I
Cas particulier : variables aléatoires discrètes finies

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs $x_1, ..., x_r$ avec les probabilités respectives $p_1, ..., p_r$, où $r \in \mathbb{N}^*$. Dans cette partie, on définit la fonction φ_X sur $\mathbb{R}^*$ par,

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \ \ \varphi_X(t) = \frac{1}{t} \ln(M_X(t))$$

1. Déterminer M_Z, lorsque Z suit une loi de Bernoulli de paramètre p, $p \in [0, 1]$.

2. Montrer que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout entier naturel k, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

3. (a) Montrer que φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0. On pose $\varphi_X(0) = E(X)$ et on note encore φ_X la fonction ainsi prolongée.

(b) Démontrer que φ_X est dérivable en 0 et calculer $\varphi'_X(0)$ en fonction de la variance $V(X)$ de X.

(c) i. Montrer que pour tout $u \leq 0$, $e^u \leq 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2$.

ii. Montrer que si X ne prend que des valeurs négatives ou nulles, alors, pour tout $t \geq 0$,

$$\varphi_X(t) \leq E(X) + \frac{t}{2}E(X^2).$$

(d) i. Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq r$, on note f_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $t \mapsto e^{tx_i}$. Montrer que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre.

ii. En déduire que deux variables discrètes finies X et Y ont la même loi si, et seulement si, les fonctions φ_X et φ_Y sont égales.

(e) Montrer que si X et Y sont des variables discrètes finies indépendantes, alors, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$.

(f) En déduire M_X, lorsque X suit une loi binomiale de paramètre s et p, s est un entier naturel non nul et $0 \leq p \leq 1$.

(g) On dit qu'une variable aléatoire réelle X est symétrique si X et $-X$ ont la même loi. Montrer que φ_X est impaire si, et seulement si, X est une variable aléatoire réelle symétrique.

4. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires discrètes finies mutuellement indépendantes sur (Ω, A, P), qui suivent la même loi que X. On note m l'espérance de X et σ son écart-type que l'on suppose strictement positif.

On pose, pour tout entier naturel non nul, $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ et $S_n^* = \dfrac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}}$.

(a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel non nul t,

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{-m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

(b) En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{S_n^*}(t) = \dfrac{t}{2}$.

Partie II
Cas des variables aléatoires discrètes réelles infinies

Soit X une variable aléatoire discrète réelle infinie, notons I_X l'ensemble des réels t pour lesquels M_X existe.

1. (a) Montrer que, pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$ et tout réel x, $e^{bx} \leq e^{ax} + e^{cx}$.

(b) En déduire que I_X est un intervalle contenant 0.

2. Soit Y une variable aléatoire discrète réelle qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la fonction génératrice des moments M_Y de Y.

3. On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle de la forme $]-a, a[$, $(a > 0)$. Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]-a, a[$, $u_n(t) = P(X = x_n)e^{tx_n}$. Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset]-a, a[$, et soit $\rho \in]\alpha, a[$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n^{(k)}(t)| \leq P(X = x_n)(|x_n|)^k e^{\rho|x_n|}$, où $u_n^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de la fonction u_n.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M_k > 0$, pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n^{(k)}(t)| \leq M_k P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}.$$

(c) En déduire que M_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-a, a[$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$.

4. En déduire l'espérance et la variance d'une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Partie III
Cas des variables aléatoires à densité

Si X est une variable aléatoire àă densité, on note I_X l'intervalle de $\mathbb{R}$, qui contient 0, pour lequel M_X existe.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires àă densité indépendantes, qui admettent respectivement des fonctions génératrices des moments M_X et M_Y , montrer que $M_{X+Y} = M_X M_Y$.

2. Soit X une variable aléatoire à densité possédant une fonction génératrice des moments M_X et une densité f. On suppose que cette fonction génératrice des moments soit définie sur $I_X =]a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < 0 < b$, et soit s un réel tel que, $0 < s < \min(-a, b)$.

(a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $|t^k| \leq \frac{k!}{s^k}e^{s|t|}$.

(b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(|X|^k)$ est finie.

(c) Montrer que, pour tout $t \in]-s, s[$, $M_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} E(X^k)\frac{t^k}{k!}$.

(d) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

FIN DE L'ÉPREUVE