CCP 2011. Option MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Exercice 1

1. Notons $u_n(x) = \dfrac{2x^n}{n^2-1}$. Il vient que $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$ de sorte que $\sum u_n(x)$ converge (absolument) pour $|x|<1$ et diverge (grossièrement) pour $|x|>1$. Ainsi $R=1$. $\square$

2. $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n-1} - \dfrac{x^n}{n+1}$ et les deux séries entières $\sum \dfrac{x^n}{n-1}$ et $\sum \dfrac{x^n}{n+1}$ ont également pour rayon 1 de la même manière que ci-dessus, de sorte que $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ pour $|x|<1$ car la linéarisation est alors bien licite. Or $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n-1} = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -x\ln(1-x)$ pour $|x|<1$ et $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = \dfrac{1}{x}\big(-\ln(1-x) - x - \dfrac{x^2}{2}\big)$ pour $|x|<1$ et $x\neq 0$. Ainsi $S(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1-x^2}{x}\ln(1-x)$ pour $|x|<1$ et $x\neq 0$ et $S(0)=0$ $\square$

Remarque : on vérifie que l'on a bien $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1-x^2}{x}\ln(1-x)\big) = 0$ ce qui était prévisible car S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ donc en particulier continue en 0.

3. Directement $S(1-h) = 1 + \dfrac{1-h}{2} + \dfrac{2-h}{1-h}\times h\ln h \xrightarrow[h\to 0^+]{} \dfrac{3}{2}$ $\square$

Remarque : en fait la série $\sum u_n(x)$ converge clairement normalement sur $[-1,1]$ donc est continue sur $[-1,1]$ par théorème de récupération uniforme de la continuité. Ainsi $\lim\limits_{h\to 0^+} S(1-h) = S(1) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2}{n^2-1} = \dfrac{3}{2}$ comme on peut facilement le voir par télescopage sur une somme partielle.

Exercice 2

1. Sur $]0,+\infty[$ l'équation se normalise en $y' - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ donc ses solutions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ (puisque $x\longmapsto \dfrac{3}{2x}$ et $x\longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ le sont) et forment une droite affine dirigée par exemple par $x\longmapsto \exp\left(\displaystyle\int_1^x \dfrac{3\,\mathrm{d}\,t}{2t}\right) = x^{3/2}$

La méthode de la variation de la constante montre que $x\longmapsto \lambda(x)x^{3/2}$ est solution si et seulement si $\lambda'(x)x^{3/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ soit si et seulement si $\lambda'(x) = \dfrac{1}{2x^2}$. On peut choisir $\lambda(x) = -\dfrac{1}{2x}$ ce qui montre que $x\longmapsto -\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ est solution particulière. Ainsi la solution générale de (E) sur $]0,+\infty[$ est $x\longmapsto \alpha x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$. $\square$

2. Si y est solution sur $[0,+\infty[$ elle est a fortiori solution sur $]0,+\infty[$ donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $y(x) = \alpha x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$ pour $x>0$. En outre y est nécessairement continue en 0 ce qui exige $y(0)=0$ et dérivable à droite en 0.

Mais $\dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \alpha\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ pour tout réel α.

L'équation (E) n'admet donc aucune solution sur $[0,+\infty[$. $\square$

Problème : Autour de la transformation de Laplace

Question préliminaire

1. Si f est positive alors les deux propositions sont équivalentes mais pour une fonction de signe non asymptotiquement fixe au voisinage de $+\infty$ on a seulement (i) implique (ii) (la réciproque étant fausse comme le prouve le classique exemple de la fonction $x\longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$). $\square$

Exemples et propriétés

2.

(a) Si f et g appartiennent à E et si λ est un réel quelconque alors $f + \lambda g$ appartient encore à E.
En effet elle est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$, $|f(t) + \lambda g(t)|e^{-xt} \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = |f(t)|e^{-xt} + |\lambda| \times |g(t)|e^{-xt}$ bien intégrable.
Ainsi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ $\square$

(b) Si $f \in F$ alors f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $f(t)e^{-xt} = O(e^{-xt})$ au voisinage de $t = +\infty$ et donc $t \longmapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x > 0$. Ainsi F est bien inclus dans E. Par ailleurs F est clairement stable par combinaison linéaire. Donc F est bien un sous-espace vectoriel de E. $\square$

(c) On note déjà que $\mathcal{L}$ est bien définie sur E (par définition même de E) et sa linéarité est immédiate par linéarité de l'intégration des fonctions intégrables. $\square$

3

(a) Notons que $\mathcal{U} \in F \subset E$ et $\mathcal{L}(\mathcal{U})(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x} \quad \forall x > 0$ $\square$

(b) Plus généralement pour tout $\lambda \geqslant 0$ on a $h_\lambda \in F \subset E$ et $\mathcal{L}(h_\lambda)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x+\lambda)t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{x+\lambda} \quad \forall x > 0$ $\square$

4. Soit n fixé quelconque dans $\mathbb{N}$ et $x > 0$ fixé. Il vient $\varphi(t) = \dfrac{t^n e^{-xt}}{e^{-xt/2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Il en résulte en particulier l'existence de $A > 0$ tel que $\varphi(t) \leqslant 1$ pour $t \geqslant A$. $\square$
Alors g_n est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g_n(t)e^{-xt} = O\big(|f(t)|e^{-(x/2)\times t}\big)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $|f(t)|e^{-(x/2)\times t}$ l'est car $f \in E$ et $\dfrac{x}{2} > 0$.

Ainsi si $f \in E$ alors, pour tout entier n, $t \longmapsto t^n f(t) \in E$. $\square$

5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ une intégration par parties fournit $\displaystyle\int_0^A f'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t = f(A)e^{-Ax} - f(0) + x\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t$.

Or $f(A)e^{-Ax} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ car f est bornée et $\displaystyle\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \mathcal{L}(f)(x)$ puisque $f \in E$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t$ converge et vaut $x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.

Comme f' est continue et <u>positive</u> (puisque f est croissante) on en déduit (question préliminaire) que $t \longmapsto f'(t)e^{-xt}$ est intégrable i.e. que $f' \in E$ et que $\mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0) \quad \forall x > 0$ $\square$

6. Régularité d'une transformée de Laplace

(a) Soit $f \in E$ soit $\varphi(x,t) = f(t)e^{-xt}$. Alors :
(i) Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \varphi(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$
(ii) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -tf(t)e^{-xt} = g_1(t)$ existe bien sur $]0,+\infty[^2$

(iii) Pour tout $x > 0$, $t \longmapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 4

(iv) Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$

(v) Pour tout $a > 0$ on a pour $(x,t) \in [a,+\infty[\times\mathbb{R}^+$: $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t|f(t)|e^{-at}$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$ toujours par la question 4 (hypothèse de domination locale en x).

Il en découle par le théorème de Leibnitz que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ $\square$

(b) Comme $g_1 \in E$ on peut lui appliquer le résultat précédent ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $(f)'' = (-1)^2\mathcal{L}(g_2)$. L'itération est claire et prouve que :
Si $f \in E$ alors $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $\mathcal{L}(f)^{(n)} = (-1)^n\mathcal{L}(g_n)$ $\square$

Comportement asymptotique de la transformée de Laplace

7. Théorème de la valeur initiale. Soit $f \in F$ et $N_\infty(f) = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{t\in\mathbb{R}^+} |f(t)|$.

(a) Pour $x > 0$ il vient immédiatement $\big|\mathcal{L}(f)(x)\big| \leqslant \dfrac{N_\infty(f)}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$ $\square$

(b) Si on suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée alors $f' \in F$ d'après la question 5.
Donc par application du résultat précédent à f' et d'après la question 5 à nouveau : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$ $\square$

8. Théorème de la valeur finale

(a) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$ il existe en particulier $A > 0$ tel que $|f(t)| \leqslant |\ell| + 1$ pour $t \geqslant A$. Par ailleurs f est bornée car continue sur le compact $[0, A]$. Il en découle que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc que $f \in F$. $\square$

(b) Il vient $a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = a_n \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-a_n t}\,\mathrm{d}\,t = \int_0^{+\infty} f(\frac{u}{a_n})e^{-u}\,\mathrm{d}\,u$ par le changement de variable $t \longmapsto u = a_n t$ qui est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même puisque $a_n > 0$. $\square$

(c) La suite (h_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction h définie par $h(x) = \ell e^{-x}$ qui est continue (donc continue par morceaux) sur $]0, +\infty[$ et est dominée par $x \longmapsto N_\infty(f)e^{-x}$ bien intégrable sur $]0, +\infty[$.
Le théorème de la convergence dominée prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}\,x = \ell$
Il résulte alors de la question(b) que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$ $\square$

(d) Le théorème de caractérisation séquentielle de la limite montre ainsi que $\lim\limits_{x\to 0} x\mathcal{L}(f)(x) = \ell$.
En particulier si $\ell \neq 0$ alors $\mathcal{L}(f)(x) \sim \dfrac{\ell}{x}$ au voisinage de 0^+ $\square$

9. On suppose dans cette question f intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(a) $R(x) = C - \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}\,t$ avec $C = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ donc, en tant que fonction intégrale de sa borne supérieure d'une fonction continue, R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $R'(x) = -f(x)$ $\square$

Notons qu'on ne peut appliquer directement la question 5 à la fonction R (ou $-R$) qui n'a aucune raison d'être croissante. Mais comme R est $\mathcal{C}^1$ on peut bien intégrer par parties ce qui fournit :
$\displaystyle\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t = \Big[-R(t)e^{-xt}\Big]_{t=0}^{t=A} - x\int_0^A R(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t$ (1) Or :

- $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_0^A f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t$ existe et vaut $\mathcal{L}(f)(x)$ puisque $f \in E$.
- $\lim\limits_{A\to+\infty} R(A)e^{-xA} = 0$ car $R(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$ puisque f est intégrable et $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{-xA} = 0$ également.
- R admettant une limite (en l'occurence 0) en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (question 8.a) donc appartient à $F \subset E$

Un passage à la limite dans (1) est ainsi licite et fournit $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$ $\square$

(b) On a évidemment $\lim\limits_{t\to+\infty} R(t) = 0$ d'où, pour $\varepsilon > 0$ fixé positif quelconque, il existe bien $A > 0$ tel que $|R(t)| \leqslant \varepsilon$ pour $t \geqslant A$. Il vient alors $\Big|\displaystyle\int_A^{+\infty} R(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t\Big| \leqslant \int_A^{+\infty} \varepsilon e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\varepsilon}{x}$
Par ailleurs $\Big|\displaystyle\int_0^A R(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t\Big| \leqslant \int_0^A |R(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}\,t$
Il découle alors de la question précédente que :
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad$ t.q. $\quad \big|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)\big| \leqslant x\displaystyle\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}\,t + \varepsilon \quad \forall x > 0$ $\square$

(c) Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\displaystyle\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}\,t = 0$, il existe $\alpha >$ tel que $0 \leqslant x\displaystyle\int_0^A |R(t)|\,\mathrm{d}\,t \leqslant \varepsilon$ pour $0 < x \leqslant \alpha$
Il résulte alors de la question précédente que :
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\alpha > 0 \quad$ t.q. $\quad \big|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)\big| \leqslant 2\varepsilon \quad \forall x \in]0, \alpha]$

En d'autres termes $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\mathcal{L}(f)(0) = R(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ $\square$

Remarque : l'intégrabilité de f dans cette question 9 n'a en fait été utilisé que pour prouver $\lim\limits_{A\to+\infty} R(A) = 0$. La conclusion est donc valable sous la simple hypothèse que l'intégrale de f est "improprement" convergente. Remarque d'ailleurs utilisée par l'énoncé à la fin du problème. Notons qu'avec l'hypothèse f intégrable, la conclusion s'obtient immédiatement par application du théorème de la convergence dominée.

Application : calcul de l'intégrale de Dirichlet

10. Commençons par remarquer que f est continue donc localement intégrable sur $[0,+\infty[$ et qu'ainsi F est bien définie sur $[0,+\infty[$

(a) $F(x)=F(\frac{\pi}{2})-\dfrac{\cos x}{x}-\displaystyle\int_{\pi/2}^{x}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ par une intégration par parties. Or $t\longmapsto\dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[\frac{\pi}{2},+\infty[$ (car dominée par $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$) ce qui prouve que F admet en $+\infty$ une limite $\ell=F(\frac{\pi}{2})-\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}\,t$ $\square$

(b) $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}\,t\geqslant\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}\,t=\frac{2}{(n+1)\pi}$

Il en découle que $\sum u_n$ diverge.

Or si f était intégrable, $G(x)=\displaystyle\int_0^x|f(t)|\,\mathrm{d}\,t$ admettrait une limite réelle ℓ' en $+\infty$ et en particulier on aurait (par caractérisation séquentielle de la limite) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}G\big((n+1)\pi\big)=\sum_{k=0}^{n}u_k=\ell'$ ce qui n'est pas car $\sum u_k$ diverge. $\square$

(c)
$$\int_0^X(\sin t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t=\mathrm{Im}\Big(\int_0^X e^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}\,t\Big)=\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{-x+i}\big(e^{(-x+i)X}-1\big)\Big)$$
$$=\frac{-1}{1+x^2}\,\mathrm{Im}\Big((x+i)\big(e^{-xX}(\cos X+i\sin X)\big)-1\Big)$$
$$=\frac{-1}{1+x^2}\Big(e^{-xX}(\cos X+x\sin X)-1\Big)\quad\square$$

La fonction $t\longmapsto(\sin t)e^{-xt}$ est bien sûr intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car continue et dominée par $t\longmapsto e^{-xt}$ avec $x>0$. $\square$

Par passage à la limite (licite de ce fait) ci-dessus on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}(\sin t)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,t=\frac{1}{1+x^2}$ $\square$

(d) Commençons par remarquer que f est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ et en outre classiquement bornée par 1. Ainsi elle appartient à F et donc a fortiori à E et il est bien licite d'envisager $\mathcal{L}(f)$.

Par ailleurs par la question 6.(a) il vient que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que $\mathcal{L}(f)=-\mathcal{L}(g_1)$.

Or ici $g_1(t)=(\sin t)e^{-xt}$ de sorte que , par la question précédente, $\mathcal{L}(f)'(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$.

Il en résulte que $\mathcal{L}(f)(x)=-\arctan x+C$ pour $x>0$

D'après la question 7.(a) bien applicable puisque $f\in F$ on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathcal{L}(f)(x)=0$ donc $\mathbb{C}=\dfrac{\pi}{2}$ et ainsi :

$\mathcal{L}(f)(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x.$ $\square$

D'après la remarque finale à la question 9, on peut appliquer le résultat de cette question 9 à la fonction f de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}\,t=\lim_{x\to0}\big(\frac{\pi}{2}-\arctan x\big)=\frac{\pi}{2}$ $\square$

FIN