Nombres entiers

Nombres entiers

Exercice 1 [02054] [correction]
Soient $\mathcal{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathcal{I} = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ les ensembles formés respectivement des entiers pairs et impairs. Montrer que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Exercice 2 [02055] [correction]
Montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

Principe de récurrence

Exercice 3 [02056] [correction]
Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) u_n$$

Donner l'expression du terme général u_n de cette suite.

Exercice 4 [02057] [correction]
Soit (u_n) la suite réelle déterminée par

$$u_0 = 2, u_1 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$$

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$$

Exercice 5 [01274] [correction]
a) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + 1/x \in \mathbb{Z}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$$

b) Déterminer un réel x non entier vérifiant la propriété $x + 1/x \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 [02058] [correction]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}, 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$$

Exercice 7 [02059] [correction]
Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, 1!3!\ldots(2n+1)! \geqslant ((n+1)!)^{n+1}$$

Exercice 8 [02060] [correction]
Le raisonnement suivant est erroné :
Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$, la propriété :
$\mathcal{P}(n) = n$ points deux à deux distincts quelconques du plan sont toujours alignés.
Pour $n = 1$ et $n = 2$, la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 2$.
Considérons alors $n+1$ points deux à deux distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
(HR) Les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$.
(HR) Les points $A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite $\mathcal{D}'$.
Or $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ contiennent les deux points distincts A_2 et A_n, donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Par suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur la droite $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
Récurrence établie.
Où est l'erreur ?

Exercice 9 [02061] [correction]
On se propose d'établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)$$

en procédant de deux manières :
a) 1ère méthode : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, on pose $A = \{m \in \mathbb{N}/2^m \mid n\}$.
Montrer que A admet un plus grand élément p et que pour celui-ci on peut écrire $n = 2^p(2q+1)$ avec $q \in \mathbb{N}$.
b) 2ème méthode : Procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^\star$

Sommes

Exercice 10 [02062] [correction]
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

a) $\sum_{i=1}^{n} \alpha + a_i = \alpha + \sum_{i=1}^{n} a_i$ b) $\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

c) $\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$ d) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$

e) $\sum_{i=1}^{n} a_i^\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^\alpha$ f) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$?

Exercice 11 [02063] [correction]
Etablir l'une des trois formules suivantes :
a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 12 [02064] [correction]
A partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$, calculer :
a) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$
b) $1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1$.

Exercice 13 [02065] [correction]
Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k$$

Exercice 14 [02066] [correction]
Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est strictement croissante.

Exercice 15 [02067] [correction]
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k! \leqslant (n+1)!$$

Exercice 16 [02068] [correction]
Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$$

Exercice 17 [02069] [correction]
a) Calculer

$$\sum_{k=1}^{p} k k!$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in [\![0, (p+1)! - 1]\!]$, il existe un $(p+1)$ uplet $(n_0, n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que

$$\forall k \in [\![0, p]\!], 0 \leqslant n_k \leqslant k \text{ et } n = \sum_{k=0}^{p} n_k k!$$

c) Justifier l'unicité d'une telle suite.

Exercice 18 [03640] [correction]
Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ deux suites réelles monotones. Comparer

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Sommes géométriques

Exercice 19 [02070] [correction]
Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$.

Exercice 20 [02071] [correction]
Calculer, pour tout $q \in \mathbb{C}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

Exercice 21 [02072] [correction]
Pour $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} k q^k$.
En calculant $qS_n - S_n$, déterminer la valeur de S_n.

Sommes doubles

Exercice 22 [02073] [correction]
A partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$, calculer :

$$\text{a) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)^2 \quad \text{b) } \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij \quad \text{c) } \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$$

Exercice 23 [02074] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $C_n = \sum_{1\leqslant p<q\leqslant n} (p+q)$ en remarquant

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p$$

Produits

Exercice 24 [02075] [correction]
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :
a) $\prod_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \prod_{i=1}^{n} a_i$ b) $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i$ c) $\prod_{i=1}^{n} a_i + b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i$?

Exercice 25 [02076] [correction]
Calculer

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Exercice 26 [02077] [correction]
On désire calculer le produit $P(x) = \prod_{0\leqslant k\leqslant n} \cos(2^k x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
a) Commencer par traiter le cas $x = 0 \quad [\pi]$.
b) Pour $x \neq 0 \quad [\pi]$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et exprimer $P(x)$.

Exercice 27 [02078] [correction]
Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$P = \prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$$

a) Calculer P quand $a = 1$.
b) Calculer $(1-a)P$ quand $a \neq 1$ et en déduire la valeur de P.
c) Comment expliquer la formule obtenue ?

Exercice 28 [03498] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, simplifier

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{2k-1}$$

Nombres factoriels

Exercice 29 [02079] [correction]
Exprimer $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$ puis $1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ à l'aide de factoriels

Exercice 30 [02080] [correction]
Montrer de deux manières que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Coefficients binomiaux

Exercice 31 [02081] [correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

En déduire

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}$$

Exercice 32 [02082] [correction]
Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\text{a) } S_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad \text{b) } S_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \quad \text{c) } S_2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 33 [02083] [correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, calculer

$$A = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2k} \text{ et } B = \sum_{k=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2k+1}$$

en formant un système dont A et B seraient solutions.

Exercice 34 [02084] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p$$

En déduire

$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}, B = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} \text{ et } C = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2}$$

Exercice 35 [02085] [correction]
[Formule de Chu-Vandermonde]
Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant p + q$.
En développant de deux manières $(1 + x)^p \times (1 + x)^q$, établir

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

Exercice 36 [02086] [correction]
Calculer, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$$

Exercice 37 [02087] [correction]
Calculer pour $n, p \in \mathbb{N}^\star$, la somme

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=1}^{p} (i + j) \right)$$

Exercice 38 [02088] [correction]
Développer $(a + b + c)^n$.

Exercice 39 [02089] [correction]
a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

b) Soient $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leqslant k \leqslant n$. Comparer

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} \text{ et } \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

c) Soit (x_n) une suite de réels. On pose

$$\forall k \in \mathbb{N}, y_k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x_\ell$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} y_k$$

Exercice 40 [02090] [correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Exercice 41 [02091] [correction]
Calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{k}$$

Exercice 42 [03682] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
a) On suppose que n est premier. Montrer

$$\forall k \in \{2, \ldots, n-1\}, n \text{ divise } \binom{n}{k}$$

b) Inversement, on suppose que n est composé. Montrer

$$\exists k \in \{2, \ldots, n-1\}, n \text{ ne divise pas } \binom{n}{k}$$

Exercice 43 [03688] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^\star$.
a) Justifier

$$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

b) En déduire que pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

et pour tout entier k vérifiant $n/2 \leqslant k \leqslant n-1$

$$\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}$$

c) Comment interpréter simplement les inégalités qui viennent d'être obtenues ?

Exercice 44 [03689] [correction]
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Par l'absurde. Si $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} \neq \emptyset$, considérons $x \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$.
Comme $x \in \mathcal{P}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$.
Comme $x \in \mathcal{I}$, il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2\ell + 1$.
Par suite $2k = 2\ell + 1$ puis $1/2 = k - \ell \in \mathbb{Z}$ ce qui est absurde
Une erreur de raisonnement classique est de décrire x comme un nombre pair et impair en choisissant le même entier k.

Exercice 2 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons que (u_n) soit une telle suite.
$A = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément m.
Puisque $m \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = u_n$. Mais alors
$u_{n+1} < u_n \leqslant m = \min A$. Absurde.

Exercice 3 : [énoncé]
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 3$,...
Par récurrence, on montre aisément

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1$$

Exercice 4 : [énoncé]
Par récurrence double.
Pour $n = 0$ et $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie aux rangs n et $n + 1$ (avec $n \geqslant 0$).

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \underset{HR}{=} 3.2^{n+1} + 3 - 2.2^n - 2 = 2^{n+2} + 1$$

Récurrence établie

Exercice 5 : [énoncé]
a) Par récurrence double.
La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (par hypothèse)
Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$.

On remarque que

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right) + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

on en déduit que

$$\left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right) = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \in \mathbb{Z}$$

Récurrence établie.
b) Il suffit de choisir x solution de l'équation $x^2 - px + 1 = 0$ avec p un entier.
Pour $p = 3$, $\Delta = 5$ et

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

convient

Exercice 6 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Pour $n = 2$ ok.
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 2$.

$$1 + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{HR}{\geqslant} \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{?}{\geqslant} \frac{3(n+1)}{2n+3}$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2n+3} = \frac{n^2 + 2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geqslant 0$$

Récurrence établie.

Exercice 7 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geqslant 1$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geqslant 1$.

$$1!3!\ldots(2n+1)!(2n+3)! \underset{HR}{\geqslant} ((n+1)!)^{n+1}(2n+3)! \underset{?}{\geqslant} ((n+2)!)^{n+2}$$

Vérifions l'inégalité proposée :

$$\frac{((n+1)!)^{n+1}(2n+3)!}{((n+2)!^{n+2}} = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!(n+2)^{n+2}} = \frac{(n+2)(n+3)\ldots(2n+3)}{(n+2)(n+2)\ldots(n+2)} \geqslant 1$$

Récurrence établie.

Exercice 8 : [énoncé]
A l'avant dernière ligne, pour que A_2 et A_n soient distincts, il est nécessaire que $n \geqslant 3$.
L'hérédité de la récurrence ne s'enchaîne alors plus avec l'initialisation.

Exercice 9 : [énoncé]
a) A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $m = 0 \in A$ et majorée car

$$2^m \mid n \Rightarrow 2^m \leqslant n \Rightarrow m \leqslant \log_2 n$$

donc A possède un plus grand élément p.
Puisque $p \in A$, $2^p \mid n$ ce qui permet d'écrire $n = 2^p k$.
Puisque $p + 1 \notin A$, $2 \nmid k$ et donc k est impair de la forme $2q + 1$ avec $q \in \mathbb{N}$.
b) Pour $n = 1$: $p = q = 0$ conviennent.
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n \geqslant 1$.
Si $n + 1$ est impair alors l'écriture est directement obtenue avec $p = 0$ et $n + 1 = 2q + 1$.
Si $n + 1$ est pair alors on peut écrire $n + 1 = 2k$ avec $1 \leqslant k \leqslant n$.
Par l'hypothèse de récurrence, on peut écrire $k = 2^p(2q + 1)$ puis $n + 1 = 2^{p+1}(2q + 1)$.
Récurrence établie.

Exercice 10 : [énoncé]
b) c) f)

Exercice 11 : [énoncé]
Par récurrence.

Exercice 12 : [énoncé]
a) En séparant la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b) On réécrit

$$1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1 = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$

et on réorganise

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k) = (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Exercice 13 : [énoncé]
D'une part

$$\sum_{k=1}^{2p} (-1)^k k = \sum_{\ell=1}^{p} (-(2\ell-1) + 2\ell) = p$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{2p+1} (-1)^k k = p - (2p+1) = -(p+1)$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^n(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 14 : [énoncé]
$u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0.$

Exercice 15 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, sachant

$$(n+1)! + (n+1)! = 2.(n+1)! \leqslant (n+2)!$$

Exercice 16 : [énoncé]
$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$

Exercice 17 : [énoncé]
a) En écrivant $k = (k+1) - 1$

$$\sum_{k=1}^{p} kk! = \sum_{k=1}^{p} (k+1)! - k! = (p+1)! - 1$$

b) Par récurrence forte sur $p \geqslant 0$.
Pour $p = 0$: ok
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $p \geqslant 0$.
Soit $n \in [\![0, (p+2)! - 1]\!]$.
Réalisons la division euclidienne de n par $(p+1)!$: $n = q(p+1)! + r$ avec $0 \leqslant r < (p+1)!$.
Puisque $0 \leqslant n < (p+2)!$ on a $0 \leqslant q \leqslant p+1$.
Par hypothèse de récurrence, on peut écrire $r = \sum_{k=0}^{p} n_k k!$ et en prenant $n_{p+1} = q$ on a $n = \sum_{k=0}^{p+1} n_k k!$.
Récurrence établie.
c) Supposons $n = \sum_{k=0}^{p} n_k k! = \sum_{k=0}^{p} n'_k k!$ avec les conditions requises.
Si $n_p < n'_p$ alors

$$\sum_{k=0}^{p} n_k k! \leqslant n_p p! + \sum_{k=0}^{p-1} k.k! = (n_p+1)p! - 1 < n'_p p! \leqslant \sum_{k=0}^{p} n'_k k!$$

Ceci est absurde donc nécessairement $n_p \geqslant n'_p$ puis par symétrie $n_p = n'_p$.
On simplifie alors le terme $n_p p!$ et on reprend le principe pour conclure à l'unicité.

Exercice 18 : [énoncé]
Etudions la différence

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} n x_k y_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k y_\ell\right)$$

ce qui donne encore

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_k y_k - x_k y_\ell)$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} x_k (y_k - y_\ell) + \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k (y_k - y_\ell)$$

car lorsque $k = \ell$ le terme $x_k(y_k - y_\ell)$ est nul.
Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme

$$\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} x_k (y_k - y_\ell) = \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} x_\ell (y_\ell - y_k)$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_k y_k - x_k y_\ell) = \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n}(x_k - x_\ell)(y_k - y_\ell)$$

Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.
Au final, si les deux suites ont même monotonie alors

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right)$$

Exercice 19 : [énoncé]
Si $\theta \neq 0 \quad [2\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1}$ (somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$)
Si $\theta = 0 \quad [2\pi]$ alors $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

Exercice 20 : [énoncé]
Si $q^2 \neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = \frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$ (somme géométrique de raison q^2)
Si $q^2 = 1$ alors $\sum_{k=0}^{n} q^{2k} = n+1$.

Exercice 21 : [énoncé]
On a

$$qS_n - S_n = \sum_{k=0}^{n} kq^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)q^k - \sum_{k=0}^{n} kq^k$$

En combinant les deux sommes

$$qS_n - S_n = nq^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{q-1}$$

puis

$$S_n = \frac{nq^{n+2} - (n+1)q^{n+1} + q}{(q-1)^2}$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(i^2+2ij+j^2\right)$ puis

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2=n\sum_{i=1}^n i^2+2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n ij+n\sum_{j=1}^n j^2=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$$

b) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^n ij=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^n j\right)$ puis

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij=\sum_{i=1}^{n-1} i\frac{n+i+1}{2}(n-i)=\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}$$

c) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^i j+\sum_{j=i+1}^n i\right)$ puis

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^n\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 23 : [énoncé]

Après réorganisation des termes

$$\sum_{1\leqslant p,q\leqslant n} p+q=2C_n+2\sum_{p=1}^n p$$

Or

$$2\sum_{p=1}^n p=n(n+1)$$

et

$$\sum_{p=1}^n\sum_{q=1}^n p+q=n^2(n+1)$$

d'où

$$C_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}$$

Exercice 24 : [énoncé]

b)

Exercice 25 : [énoncé]

$$\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^n\frac{k+1}{k}=\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=n+1$$

Exercice 26 : [énoncé]

a) Si $x=0\quad[2\pi]$ alors $P(x)=1$. Si $x=\pi\quad[2\pi]$ alors $P(x)=-1$.

b) En exploitant successivement la formule $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

$$\sin(x)P(x)=\sin x.\cos x.\cos 2x\dots\cos 2^n x=\frac{1}{2^{n+1}}\sin 2^{n+1}x$$

donc

$$P(x)=\frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}$$

Exercice 27 : [énoncé]

a) Si $a=1$ alors

$$P=\prod_{k=0}^n 2=2^{n+1}$$

b) Si $a\neq 1$ alors

$$(1-a)P=(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

Par application de la formule $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ on obtient

$$(1-a)P=(1-a^2)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$

et en répétant l'opération

$$(1-a)P=(1-a^{2^{n+1}})$$

On conclut

$$P=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

c) La formule obtenue correspond à celle exprimant la somme

$$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{2^n-1}$$

En effet si l'on développe le produit définissant P, on obtient que P est la somme des termes

$$a^{\sum_{i=0}^n \varepsilon_i 2^i}\quad\text{avec } \varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$$

Or tout entier k compris entre 0 et 2^{n-1} s'écrit de façon unique sous la forme

$$k=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon_i 2^i \text{ avec } \varepsilon_0,\dots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$$

et donc

$$P=1+a+a^2+a^3+\dots+a^{2^n-1}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Pour $n\geqslant 2$, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}=\frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\times\ldots\times 5}{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}$$

puis après simplification

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}=\frac{(2n+3)(2n+1)}{3}$$

et pour $n=1$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}=5$$

ce qui rend la formule précédente encore valable.

Exercice 29 : [énoncé]
En extrayant un 2 dans chaque facteur

$$2.4.6\times\dots\times(2n)=2^n 1.2.3\times\dots\times n=2^n n!$$

En introduisant les facteurs pairs intermédiaires

$$1.3.5\times\dots\times(2n+1)=\frac{1.2.3.4.5.6\times\dots\times(2n)\times(2n+1)}{2.4.6\times\dots\times(2n)}=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

Exercice 30 : [énoncé]
(1) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$:
Pour $n=1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n\geqslant 1$.

$$\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(4k-2)\times(4n+2)\underset{HR}{=}\prod_{k=1}^{n}(n+k)\times(4n+2)$$

et

$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)=(n+2)(n+3)\dots(2n+2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)\times\frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)\times(4n+2)$$

Récurrence établie.
(2) Directe :

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=2^n\prod_{k=1}^{n}(2k-1)=2^n(1\times 3\times\ldots\times(2n-1))=\frac{(2n)!}{n!}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n}(n+k)=(n+1)(n+2)\dots(2n)=\frac{(2n)!}{n!}$$

Exercice 31 : [énoncé]
On a

$$p\binom{n}{p}=p\frac{n!}{p!(n-p)!}=n\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}=n\binom{n-1}{p-1}$$

et donc

$$\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p}=n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) Par la formule du binôme

$$S_0=(1+1)^n=2^n$$

b) $((1+x)^n)'=n(1+x)^{n-1}$ donne

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$$

donc

$$S_1 = n2^{n-1}$$

c)

$$(x((1+x)^n)')' = (nx(1+x)^{n-1})' = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

donne

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1} + n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

donc

$$S_2 = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$$

Exercice 33 : [énoncé]
On a

$$A + B = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$$

et

$$A - B = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} = (1-1)^n = 0^n = 0$$

donc

$$A = B = 2^{n-1}$$

Exercice 34 : [énoncé]
Par la formule du binôme

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} j^p = (1+j)^n = 2^n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \cos^n \frac{\pi}{3}$$

On a aussi

$$A + B + C = (1+1) = 2^n$$

et par ce qui précède

$$A + jB + j^2C = 2^n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{3}} \cos^n \frac{\pi}{3}$$

puis aussi par conjugaison

$$A + j^2B + jC = 2^n \mathrm{e}^{-i\frac{n\pi}{3}} \cos^n \frac{\pi}{3}$$

On en déduit

$$A = \frac{2^n}{3}\left(1 + 2\cos\frac{n\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right), B = \frac{2^n}{3}\left(1 + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right)$$

et

$$C = \frac{2^n}{3}\left(1 + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right)$$

Exercice 35 : [énoncé]
Le coefficient de x^n dans $(1+x)^p \times (1+x)^q = (1+x)^{p+q}$ est $\binom{p+q}{n}$.
Lorsqu'on développe le produit $(1+x)^p \times (1+x)^q$, on obtient un x^n en croisant un x^k de $(1+x)^p$ par un x^{n-k} de $(1+x)^q$ (pour $0 \leqslant k \leqslant n$). Le coefficient de x^k dans $(1+x)^p$ est $\binom{p}{k}$ et le coefficient x^{n-k} dans $(1+x)^q$ est $\binom{q}{n-k}$ donc le coefficient de x^n dans $(1+x)^p \times (1+x)^q$ est

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$$

d'où l'égalité.

Exercice 36 : [énoncé]
On a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n}$$

En regroupant les deux premiers termes par la formule du triangle de Pascal

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+2}{1} + \binom{p+2}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n}$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+3}{2} + \cdots + \binom{p+n}{n} = \binom{p+n+1}{n}$$

Exercice 37 : [énoncé]
On commence par exprimer le produit comme un rapport de nombres factoriels

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!}$$

puis on introduit un coefficient du binôme

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i}$$

La somme introduite peut être calculée grâce à la formule de Pascal

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\binom{p+n+1}{n}=\frac{(p+n+1)!}{(p+1)n!}$$

Exercice 38 : [énoncé]
$(a+b+c)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}a^{n-k}b^{k-\ell}c^{\ell}$ et $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\frac{n!}{(n-k)!(k-\ell)!\ell!}$.

Exercice 39 : [énoncé]
a) Par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1+(-1))^n=\begin{cases}1 \text{ si } n=0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

b) On a

$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}=\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(n-\ell)!}{(n-k)!(k-\ell)!}=\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

c) On a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}x_\ell=\sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$$

Or

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=(-1)^{n-\ell}\binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

avec

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}=\begin{cases}1 \text{ si } \ell=n\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k=x_n$$

Exercice 40 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\geqslant 1$ sachant :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{n+1}\binom{n+1}{k}=\frac{1}{n+1}-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Exercice 41 : [énoncé]
Exploitons

$$\binom{2n+1}{k}=\binom{2n}{k-1}+\binom{2n}{k}$$

On obtient

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k-1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}$$

Par décalage d'indice

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{2n}{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{k}$$

Après simplification,

$$S_n=(-1)^n\binom{2n}{n}$$

Exercice 42 : [énoncé]
a) On suppose n premier. On sait

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

donc

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

ce qui permet d'affirmer que n divise l'entier $k\binom{n}{k}$. Or n est premier et donc premier avec k puisque $k < n$. Par le théorème de Gauss, on peut alors affirmer que n divise $\binom{n}{k}$.
b) Supposons maintenant n composé. On peut introduire p un facteur premier de n avec $p < n$. Nous allons alors montrer que n ne divise par $\binom{n}{p}$ ce qui permet de conclure.
Par l'absurde, supposons que $m = \frac{1}{n}\binom{n}{p}$ soit un entier. On peut écrire

$$(n-1)! = m.p!(n-p)!$$

Puisque p divise n, on peut aussi écrire $n = pq$ avec q entier et donc

$$(pq-1)! = mp!\,(p(q-1))!$$

Dans les produits définissant $(pq-1)!$ et $(p(q-1))!$, on retrouve les mêmes multiples de p, à savoir $p, 2p, \dots (q-1)p$. On peut donc écrire

$$(pq-1)! = ka \text{ et } (p(q-1))! = kb$$

avec k regroupant le produit des multiples de p précédents et a et b non divisibles par p.
La relation initiale se simplifie alors pour donner

$$a = mp!b$$

ce qui entraîne que a est divisible par p. C'est absurde !

Exercice 43 : [énoncé]
a) On peut écrire

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)}{k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ce qui donne directement la relation soumise.
b) Si $1 \leqslant k \leqslant n/2$ alors $2k < n+1$ et donc $n-k+1 > k$ puis

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}$$

La deuxième inégalité s'en déduit par la relation de symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

c) Pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux croît puis décroît en étant extrémale en son milieu.

Exercice 44 : [énoncé]
On a

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}$$

Or, pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux est maximale en son milieu donc

$$\forall 0 \leqslant k \leqslant 2n, \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}$$

et donc

$$2^{2n} \leqslant (2n+1)\binom{2n}{n}$$

puis l'inégalité proposée.