Extrait

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ désigne le $\mathbb{C}-$espace vectoriel des fonctions complexes $2\pi-$périodiques et de classe k sur $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2.1. Quelques propriétés des coefficients de Fourier

2.1.1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\,c_n(f)$.

2.1.3. En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f'') = -n^2\,c_n(f)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

2.2.1. Montrer que la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2.1.1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$|C_n(f)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|.\underbrace{|e^{-int}|}_{=1}\,dt$$

$$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{Z},\ |C_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt.$$

D'où la famille $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2) Soit $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. M.q. $C_n(f') = in\,C_n(f)$.

On a :

$$C_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,e^{-int}\,dt$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\Big[f(t)\,e^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t).(-in)\,e^{-int}\,dt\right)$$

$$\Big[f(t)\,e^{-int}\Big]_{-\pi}^{\pi} = f(\pi)\,e^{-in\pi} - f(-\pi)\,e^{in\pi}$$

$$\left[f(t)\,e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} = f(\pi)\,e^{-in\pi} - f(-\pi)\,e^{in\pi}$$

On a $f(-\pi) = f(\pi)$ car f 2π-périodique.

et $e^{-in\pi} = e^{-in\pi} \cdot e^{2n\pi i} = e^{in\pi}$

D'où $\left[f(t)\,e^{-int}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

Alors $C_n(f') = in \cdot \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt = in \cdot C_n(f)$

2.1.1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la famille $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\,c_n(f)$.

$\boxed{\textbf{2.1.3.}}$ En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f'') = -n^2\,c_n(f)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On a :

$$C_n(f'') = C_n\big((f')'\big)$$

$$= in\,C_n(f') \quad (\text{d'après } (2.1.2))$$

$$= in \cdot \big(in\,C_n(f)\big) \quad ((2.1.2))$$

$$= -n^2\,C_n(f)$$

2.1. Quelques propriétés des coefficients de Fourier

2.1.1. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la famille $\left(c_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2. Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

2.1.3. En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f'') = -n^2\, c_n(f)$.

Soit $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

2.2.1. Montrer que la famille $\left(c_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \ |C_n(f)| = \dfrac{|C_n(f'')|}{n^2}$ (d'après 2.1.3)

Or $\left(C_n(f'')\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée d'après (2.1.1)

Alors $(\exists\, C > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, |C_n(f'')| \leq C)$

D'où $\left(\forall n \in \mathbb{Z}^*, \ |C_n(f)| \leq \dfrac{C}{n^2}\right)$

Or la famille $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable (vue ci-dessus)

D'où la famille $\left(|C_n(f)|\right)_{n\in\mathbb{Z}^*}$ est sommable.

$\Rightarrow \left(C_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable

$\square$

Fin