

Ex 14 :

1°) avec le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - t \\ \text{On trouve que : } \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt \end{array} \right.$$

$$2°) \rightarrow I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \pi/2 ; \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = (-\cos t)_0^{\pi/2} = 1$$

$$\rightarrow \text{Soit } n \geq 2 : \\ I_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot (\sin t)^{n-1} \, dt = \int_0^{\pi/2} (-\cos t)' \cdot (\sin t)^{n-1} \, dt$$

$$I_n = \underbrace{\left[\cos t \cdot (\sin t)^{n-1} \right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot (n-1) \sin t \cdot \cos t \, dt$$

$$I_n = (n-1) \left[\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \underbrace{(1 - \sin^2 t)}_{=\cos^2 t} \, dt \right] = (n-1) (I_{n-2} - I_n)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{B}$$

3°) Il s'agit de montrer que la suite $((n+1)I_n \cdot I_{n+1})_{n \geq 0}$ est constante :

Notons $U_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{On a } U_{n+1} - U_n &= (n+2) I_{n+1} I_{n+2} - (n+1) I_n I_{n+1} \\ &= I_{n+1} \cdot (n+2) \left(I_{n+2} - \frac{(n+1)}{n+2} \cdot I_n \right) \\ &= 0 \text{ d'après 2°} \end{aligned}$$

Cette constante est $U_0 = I_0 \cdot I_1 = \frac{\pi}{2}$

4) a°) $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante ; en effet :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

(1)

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin^{n+1} t - \sin^n t) dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^n t}_{\geq 0} \underbrace{(\sin t - 1)}_{\leq 0} dt \leq 0$$

b) $I_{n+1} \sim I_n$, effectif:

$$\forall n, \text{ on a } I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \quad (\text{car } (I_n) \downarrow)$$

$$\Rightarrow \forall n, \frac{n+1}{n+2} \cdot I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$$

$$\Rightarrow \forall n, \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

$$\left| \begin{array}{l} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\rightarrow 1} \\ \text{Gendarmes} \Rightarrow \lim_n \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \end{array} \right| ; \text{ (ad } I_{n+1} \sim I_n)$$

c) $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$; effectif

$$\text{On a } (n+1) I_n I_{n+1} \sim \frac{\pi}{2} \quad (\text{clair})$$

$$\text{et } \left(\begin{array}{l} (n+1) \sim n \\ I_{n+1} \sim I_n \end{array} \right) \Rightarrow (n+1) I_n I_{n+1} \sim n \cdot I_n^2$$

$$\text{d'où } n \cdot I_n^2 \sim \frac{\pi}{2}, \text{ (ad } I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}})$$

$$\Rightarrow I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

5°) a°) Let p > 1, on a :

$$\begin{cases} I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} \\ I_{2p-2} = \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} \\ \dots \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \text{, en multipliant ces égalités terme à terme, et après simplifications, on obtient:}$$

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots \times 1}{(2p)(2p-2)\dots \times 2} I_0 = \frac{(2p)!}{((2p) \cdot \dots \cdot 2)^2} I_0$$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p \cdot p!)^2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} \cdot p!} \cdot I_0 = C_{2p}^p \cdot \frac{1}{2^{2p}} \cdot \frac{\pi}{2} \left(I_0 = \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{car})$$

$$\forall p: \left[I_{2p} = C_{2p}^p \cdot \frac{1}{2^{2p}} \cdot \frac{\pi}{2} \right], \forall p \geq 1 \quad (\text{égalité encore valable pour } p=0)$$

b) De même, on trouve que:

$$\left[I_{2p+1} = \frac{1}{C_{2p}^p} \cdot \frac{2^{2p}}{2p+1} \right], \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} 6^\circ) \quad 4^\circ) &\Rightarrow I_{2p+1} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(2p+1)}} \\ &\Rightarrow \left[I_{2p+1} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \right] \quad (\text{car } (2p+1) \sim 2p) \end{aligned}$$

$$\text{D'autre part, on a } I_{2p+1} = \frac{2^{2p}}{2p+1} \cdot \frac{(p!)^2}{(2p)!} = \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p)!} \cdot \frac{1}{2p+1} \sim \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(p!)^2} \cdot \frac{1}{2p}$$

$$\text{Donc } \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p)!} \cdot \frac{1}{2p} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \sim \sqrt{\pi}, \text{ car } \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2p}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

et on conclut

3

Ex 1 : Juste utiliser votre cours de [<] fractions rationnelles [>] et vous décomposerez $F(x)$:

→ Par exemple : Effectuez la division euclidienne du numérateur par le dénominateur, vous trouverez :

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 2x - 3) + (-2x + 1)$$

Donc $F(x) = (x^2 + 2x - 3) + \frac{-2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ (Ainsi : $a=2, b=2, c=-3$)

Puis on décompose la fraction $\frac{-2x+1}{(x-1)(x-2)}$: On trouve donc d et e :

→ Pour les primitives de F : $\int F(x) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + d \cdot \ln|x-1| + e \ln|x-2| + C$

→ Rappel : Pour déterminer par exemple d :

On multiplie par $(x-2)$ on trouve :

$$\frac{x^4 - x^3 - 7x^2 + 11x - 5}{(x-2)} = (x-2)(x^2 + 2x - 3) + d + (x-2) \cdot \frac{e}{(x-2)}$$

puis on tend x vers 1 et on tire la valeur de d :

$$d = \frac{1 - 1 - 7 + 11 - 5}{1 - 2} = \boxed{1}$$

Ex 2 : On utilise : $\cos a \sin b = \frac{\sin(b+a) + \sin(b-a)}{2}$

$$\Rightarrow I_{n,p} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{2\pi} \sin((n+p)x) dx + \int_0^{2\pi} \sin((p-n)x) dx \right]$$

Cas 1 : Si $n+p=0$ (c'est $n=p=0$) : $\boxed{I_{n,p}=0}$

Cas 2 : si $(n \neq 0 \text{ ou } p \neq 0)$ (c'est $n+p \neq 0$)

On a : $\int_0^{2\pi} \sin((n+p)x) dx = \left[-\frac{\cos((n+p)x)}{n+p} \right]_0^{2\pi} = 0$

A) si $p=n$: $\int_0^{2\pi} \sin((p-n)x) dx = 0$

B) si $p \neq n$: $\int_0^{2\pi} \sin((p-n)x) dx = \left[-\frac{\cos((p-n)x)}{p-n} \right]_0^{2\pi} = 0$

Conclusion : $\boxed{\forall n, p \in \mathbb{N}, I_{n,p} = 0}$

Ex 8 : $\left(\int_0^1 f \cdot 1\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^1 1\right)}_{=1}$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Ex 9 : $\underbrace{\left(\int_a^b (\sqrt{f}) \times \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)\right)^2}_{=(b-a)^2} \leq \left(\int_a^b (\sqrt{f})^2\right) \cdot \left(\int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2\right)$

Ex 10 : $(\text{lub} - \text{lua})^2 = \left(\int_a^b \frac{1}{x} \times 1 dx\right)^2 \leq \underbrace{\left(\int_a^b \frac{1}{x^2} dx\right)}_{= \frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \underbrace{\left(\int_a^b 1^2 dx\right)}_{=(b-a)}$

$\Rightarrow (\text{lub} - \text{lua}) \leq \frac{(b-a)}{ab}$; d'où

Ex 11 : $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \left[f(t) \cdot \frac{\sin(nt)}{n} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\sin(nt)}{n} \cdot f'(t) dt$
 $\forall n \geq 1$
 $= \underbrace{\left(f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na) \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \int_a^b \sin(nt) \cdot f'(t) dt$

car : (bornée) $\times$ (limite nulle)

Donc par, $f \in C^1 \text{ sur } [a,b] \Rightarrow f'$ continue sur $[a,b]$

$\Rightarrow f'$ bornée sur $[a,b]$

$\Rightarrow \exists M \geq 0, \forall t \in [a,b], |f'(t)| \leq M$

D'où : $\forall n \geq 1, \left| \frac{1}{n} \int_a^b \sin(nt) \cdot f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\int_a^b \underbrace{|\sin(nt)|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|f'(t)|}_{\leq M} dt}_{\leq \frac{M \cdot (b-a)}{n}}$

D'où $\left| \lim_n \frac{1}{n} \int_a^b \sin(nt) \cdot f'(t) dt \right| = 0$

Du coup :

Ex 12 : 1o) $\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^n}{1+x}$ $\left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q} \right)$

2o) 1o) $\Rightarrow \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx}_{=\ln 2} - \underbrace{\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot x^k \right) dx}_{= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\int_0^1 x^k dx \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}}$

(5)

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx = \ln 2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i} = U_n$$

$$3^\circ) i) \left| \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-x)^n}{1+x} \right| dx = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{car } \frac{1}{1+n} \leq 1 \\ \forall x \in [0,1] \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$ii) (2^\circ) \text{ et } (3^\circ i)) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+1})$$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors la suite $(U_n)_n$ converge vers $\ln 2$

Ex 5 : $\int_{-1}^1 x^{2007} (x^2+2)^{1789} dx = 0$: fonction impaire entre -1 et 1

$\rightarrow$ Idem pour $\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{\sin(\sin(\tan x))}{\ln(2+x^4)} dx$

$$\rightarrow \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx = \left(\int_0^1 (1+x^4)^{-2} \cdot (1+x^4)' dx \right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left[\frac{(1+x^4)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = \dots$$

Ex 3 : 1) $I+J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + 2 \sin x \cos x}{1+2 \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = 1$

$$I = \left(\int_0^{\pi/2} \frac{(1+2 \sin x)'}{1+2 \sin x} dx \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\ln |1+2 \sin x| \right]_0^{\pi/2} = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} I+J=1 \\ I=\frac{\ln 3}{2} \end{cases} \Rightarrow J = 1 - \frac{\ln 3}{2}$$

$$2^\circ) A+B = \int_0^\pi x dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$A-B = \int_0^\pi x \cdot \cos(2x) dx \xrightarrow{\text{IPP}} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(2x)}{2} \right)' x dx$$

$$A-B = \left[\frac{\sin(2x)}{2} \cdot x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(2x)}{2} dx = \dots$$

$\rightarrow \begin{cases} A+B = \dots \\ A-B = \dots \end{cases}$, résoudre ce système et trouver $\begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases}$

3) $\rightarrow M=N$ grâce au changement de variable : $(x = \frac{\pi}{2} - t)$

$$\rightarrow M+N = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2M = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{donc } M=N = \frac{\pi}{4}$$

(6)

Formules de Taylor : Applications

TD : intégration
(suite)

Ex 16 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \geq 0$.
 $\exp \in C^{n+2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x, 0 \in \mathbb{R}$. Alors d'après la FTRI, on a :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp^{(n+1)}(t) dt$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt}_{\geq 0 \text{ car } 0 \leq x} \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Ex 17 :
 1°) $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$; En effet. On a $\operatorname{Ch} \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x, 0 \in \mathbb{R}$, alors d'après la FTRI, on a :

$$\operatorname{Ch}(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{\operatorname{Ch}^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} \operatorname{Ch}^{(3)}(t) dt$$

car $\operatorname{Ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \operatorname{sh}(t) dt$.

Cas 1 : si $x \geq 0$

On a : $(\forall t \in [0, x], \frac{(x-t)^2}{2} \geq 0 \text{ et } \operatorname{sh}(t) \geq 0)$

Donc $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \operatorname{sh}(t) dt \geq 0$ CAR EN PLUS $0 \leq x$.

Cas 2 : si $x < 0$

On a : $(\forall t \in [x, 0], \frac{(x-t)^2}{2} \geq 0 \text{ et } \operatorname{sh}(-t) \geq 0 \text{ (car } (-t) \geq 0))$

Donc $\int_x^0 \frac{(x-t)^2}{2} \operatorname{sh}(-t) dt \geq 0$ (CAR $x < 0$)

Ainsi, $\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} \operatorname{sh}(t) dt \geq 0$, et donc $\operatorname{Ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \text{sh}(x) \geq x + \frac{x^3}{6}$; efficace. Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

On a $\text{sh} \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $x, 0 \in \mathbb{R}$, alors d'après la FTRI, on a:

$$\text{sh}(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\text{sh}^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \text{sh}^{(4)}(t) dt$$

$$\Rightarrow \text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \text{sh}^{(4)}(t) dt$$

Et on a: $\forall t \in [0, x], \frac{(x-t)^3}{6} \geq 0$ et $\text{sh}^{(4)}(t) \geq 0$, en plus $0 \leq x$

D'où $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \text{sh}^{(4)}(t) dt \geq 0$, car $\boxed{\text{sh}(x) \geq x + \frac{x^3}{6}}$

EX 18: Soit $x \in [0, \pi]$

1°) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$; efficace!

On a $\sin \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x, 0 \in \mathbb{R}$, alors d'après FTRI, on a:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} \sin^{(4)}(t) dt$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin^{(4)}(t) dt \geq x - \frac{x^3}{6}$$

car $(\forall t \in [0, x], \frac{(x-t)^3}{6} \geq 0$ et $\sin^{(4)}(t) \geq 0$, en plus $0 \leq x \Rightarrow \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \sin^{(4)}(t) dt \geq 0$

2°) $\sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$; efficace!

On a de même que $\sin \in C^6(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $x, 0 \in \mathbb{R}$

$$\text{FTRI} \Rightarrow \sin x = \sum_{k=0}^5 \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k + \int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \sin^{(6)}(t) dt$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^5}{5!} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{\leq 0} dt}_{\leq 0 \text{ car } 0 \leq x}$$

D'où $\boxed{\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$

Ex 19 :

10) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer $\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$:

On utilisera ici l'inég de T-L à la fonction exp.

Posons $I = [-|x|, |x|]$, on a :

$$\begin{cases} \exp \in C^{n+2}(I, \mathbb{R}) \\ \forall t \in I = [-|x|, |x|], \left| \exp^{(n+1)}(t) \right| = e^t \leq \overbrace{e^{|x|}}^{\text{borne la plus élevée de } M_{n+1,0}} \\ x \text{ et } 0 \in I \end{cases}$$

d'où d'après la F d'I-TL, on a :

$$\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \right| \leq \frac{M \cdot |x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

20) Il suffit de justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \right) = 0$

Or au voisinage de $+\infty$, la factorielle l'emporte sur la puissance, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$$

30) Pour $x=1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$

Posons $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ (on a $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - e| \leq \frac{e}{(n+1)!}$)

Pour que U_n soit une valeur approchée de e à 10^{-5} près il suffit que $\frac{e}{(n+1)!} \leq 10^{-5}$.

Ainsi, on cherchera un entier n_0 vérifiant $\frac{e}{(n_0+1)!} \leq 10^{-5}$.

U_{n_0} est alors une valeur approchée de e à 10^{-5} près

EX 20 :
10) Soit $x > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\wedge$ que $\left| \ln(1+x) - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$:

Posons $f(t) = \ln(1+t)$. f est de classe C^{n+1} sur $[0; +\infty[$.

$$\forall t \in [0; +\infty[, \forall k \geq 1, f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+t)^k}$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0; +\infty[, |f^{(n+1)}(t)| = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$$

$$\text{Ainsi, on a } \begin{cases} f \in C^{n+1} \text{ sur } [0; +\infty[\\ \forall t \in [0; +\infty[, |f^{(n+1)}(t)| \leq n! \\ 0 \in [0; +\infty[\end{cases}$$

Alors d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \right| \leq n! \frac{|x-0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} (-1)^{k-1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

avec $|x| = x$ (car $x > 0$) et que $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$, on a

l'inégalité voulue.

20) Pour $x=1$ dans l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \ln 2 - \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \text{ on a que } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) = \ln 2$$

EX 21 : On utilisera ici la formule de Taylor-Lagrange :

$$10) \text{ On a } f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + o(h^2) \quad (f \in C^2 \text{ sur } I)$$

$$\Rightarrow f(a-h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2} h^2 + o(h^2)$$

$$2^{\text{de}} \text{ on } f(a+h) + f(a-h) - 2f(a) = f''(a)h^2 + o(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2} = f''(a) + \underbrace{o(1)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \longrightarrow f''(a)$$

$$2^{\text{e}}) f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + o(h^3)$$

D'après le FTY principe $f \in C^3$ sur I et $a \in I$.

D'où :

$$f(a+3h) \underset{h \rightarrow 0}{=}$$

$$f(a-3h) \underset{h \rightarrow 0}{=}$$

$$f(a-h) \underset{h \rightarrow 0}{=}$$

$$\text{Alors : } f(a+3h) - 3f(a+h) + 3f(a-h) - f(a-3h) \underset{h \rightarrow 0}{=}$$

$$\Rightarrow \frac{f(a+3h) - 3f(a+h) + 3f(a-h) - f(a-3h)}{h^3} \underset{h \rightarrow 0}{=}$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} G(h) =$$

Fin

(1)

1) Ex 23: $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$

① $\frac{1}{\ln t}$ défini $\Leftrightarrow t \in]0, 2[\cup]2, +\infty[$

et il est clair que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue aussi sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

② $\int_a^b \frac{1}{\ln t} dt$ est définie $\Leftrightarrow (a \text{ et } b \in]0, 2[) \text{ ou } (a \text{ et } b \in]2, +\infty[)$

③ $\int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt$ définie $\Leftrightarrow (x \text{ et } 2x \in]0, 1[) \text{ ou } (x \text{ et } 2x \in]2, +\infty[)$

$\Leftrightarrow x \in]0, \frac{1}{2}[\text{ ou } x \in]1, +\infty[$.

Enfin: $D_f =]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$

2) i) $\forall x \in D_f, f(x) = G(2x) - G(x)$

ii) $\forall x \in D_f, f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{2 \ln x - \ln 2x}{\ln x \ln(2x)}$

$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{(\ln x - \ln 2)}{\ln x \cdot \ln(2x)}$

3) Pour le signe de $f'(x)$, on étudie les signes de $(\ln x - \ln 2)$, $(\ln x)$ et $\ln(2x)$, puis on tire celui de $f'(x)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$\ln x - \ln 2$	—		—	+	+
$\ln x$	—		—	+	+
$\ln(2x)$	—		—	+	+
$f'(x)$	—		—	+	+
f					

$$\ln x - \ln 2 \Leftrightarrow x > 2$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$; \ln(2x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

(2)

4) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = ?$

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt, \text{ On encadrera cette}$$

intégrale. Et par cela, on commence par encadrer le qu'on a l'intérieur $\ll \frac{1}{\ln t}$.

Soit $x > 1$.

$$\forall t \in [x, 2x], \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(2x)} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\ln x} dt$$

$$\Rightarrow \forall x > 1, \frac{x}{\ln(2x)} \leq f(x) \leq \frac{x}{\ln x}$$

ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(2x)} = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ii) Asymptote?

On parle d $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

(2) $\Rightarrow \forall x > 1, \frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln x}$

Gendarmes $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(Cf) possède une branche parabolique de direction l'axe (Ox)

(Par d'asymptote, il y a une branche parabolique)

5) i) $\lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = ?$, où $\varphi(t) = \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}$ (vrai les deux limites)

On a $\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (on pose : $\begin{cases} 1+x=t \\ x=t-1 \end{cases}$)

$$\Rightarrow \ln(t) \sim (t-1) - \frac{1}{2}(t-1)^2 + o(t-1)$$

$$\varphi(t) = \frac{(t-1) - \ln t}{\ln t \cdot (t-1)} \quad ; \quad \left(\frac{\ln(t) - (t-1)}{t} \right) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} -\frac{1}{2} (t-1)^2$$

$$\Rightarrow \left[\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2} \frac{(t-1)^2}{(\ln t)(t-1)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2} \frac{(t-1)}{\ln t} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow 1} \varphi(t) = \frac{1}{2}}$$

iii) Notons encore φ son prolongement par continuité en 1.
 φ est ainsi continue sur $[1, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

Soit $x > 1$. On a:

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt = \int_x^{2x} \left(\varphi(t) + \frac{1}{t-1} \right) dt = \int_x^{2x} \varphi(t) dt + \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt$$

$$\Rightarrow \forall x > 1, f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt + \left(\ln(2x-1) - \ln x \right)$$

$$\text{En fin de compte} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \int_1^2 \varphi(t) dt}$$

intégrale définie car φ continue sur $[1, 2]$

$$= \left[\ln(t-1) \right]_x^{2x} = \ln(2x-1) - \ln x$$

3

