Problèmes de synthèse et extraits de DS

Algèbre linéaire en dimension finie

(sans les matrices)

Exercice 1 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère le sous-ensemble :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \;/\; P(0) = P(1) = 0\}$$

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Déterminer une base et la dimension de F.
   (c) Montrer que $E = F \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(2) \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que f est une forme linéaire. On note $H = \operatorname{Ker} f$. Quelle est la dimension de H ?
   (b) A-t-on $E = F \oplus H$?
   (c) Déterminer une base de $F \cap H$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, on considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n, ainsi que le sous-ensemble de E :

$$H_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \;\; P(1) = P'(1) = 0\}$$

1. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de E.
2. On donne $P_n = X^n - nX + 1$. Montrer que le reste de la division euclidienne de P_n par P_2 est un polynôme constant que l'on déterminera.
3. Montrer que $E = H_n \oplus \mathbb{R}_1[X]$. En déduire la dimension de H_n. Quelle est la projection de P_n sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à H_n ?
4. Dans cette question, on suppose $n = 3$.
   (a) Ecrire P_3 comme somme d'un élément de H_3 et d'un élément de $\mathbb{R}_1[X]$.
   (b) Montrer que la famille $(X(X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de H_3.
   (c) En utilisant les deux questions précédentes, calculer les coordonnées de P_3 dans la base $(1, X, X(X-1)^2, (X-1)^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_4[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 4, on considère les polynômes :

$$\begin{array}{lll} P_1 = 1 + X^2 & P_2 = X(1 + X^2) & P_3 = (1 + X^2)^2 \\ Q_1 = X^2 - 1 & Q_2 = X^2 - X & Q_3 = X^2 - X - 1 \end{array}$$

On désigne par
$$\begin{array}{l} F = Vect(P_1, P_2, P_3) \\ G = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \text{ t.q. } (X^2 + 1) \text{ divise } P\} \\ H = Vect(Q_1, Q_2, Q_3) \\ K = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \text{ t.q. } P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\} \end{array}$$

On admet que F et H sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$.

1. Donner, en le justifiant brièvement, la dimension du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_4[X]$.
2. a) Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et déterminer une base de G. (on écrira $P = (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c)$)
   b) Montrer que $F = G$.
   c) Le polynôme $P = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$ est-il élément de G ? Si oui, donner ses coordonnées dans la base (P_1, P_2, P_3).
3. a) Montrer que le sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}_4[X]$ est de dimension 3.
   b) Déterminer les dimensions de $F + H$ et $F \cap H$.
4. a) Montrer que K est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}_4[X]$.
   b) Montrer que $\mathbb{R}_4[X] = G \oplus K$