CCP 2015. Option MP. Mathématiques 2.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

Exercice 1.

1. $21 = 16 + 4 + 1 = 2^4 + 2^2 + 1 = (1, 0, 1, 0, 1)_2$ $\square$

2. `mystere(n,b)` renvoie la liste des chiffres de l'écriture de l'entier n en base b (à noter une légère faute d'énoncé : il faut supposer $b > 1$). En particulier `mystere(256, 10)` renvoie la liste `[6, 5, 2]`

k	1	2	3
c_k	6	5	2
t_k	[6]	[6, 5]	[6, 5, 2]
n_k	25	2	0

3.a. Si $n_k > 0$ alors $n_{k+1} < n_k$ donc la suite d'entiers (n_k) est stricement décroissante et finit par atteindre 0. $\square$

3.b. L'inégalité proposée est vraie au rang 0 et en supposant qu'elle soit vraie jusqu'au rang $k < p$ il vient : $n_{k+1} = \text{Int}(\dfrac{n_k}{10}) \leqslant \dfrac{n_k}{10} \leqslant \dfrac{n}{10^{k+1}}$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi on a bien $n_k \leqslant \dfrac{n}{10^k}$ pour tout k entre 0 et p. $\square$

En particulier $n_{p-1} \geqslant 1$ donc $10^{p-1} \leqslant n$ et ainsi $p \leqslant 1 + \log_{10} n$ $\square$

4. Vu l'exemple donné, il faut comprendre la somme des chiffres en base 10.

```
def somme_chiffres(n):
  s = 0
  while (n > 0):
    c = n % 10
    s = s + c
    n = n // 10
  return s
```

5.

```
def somme_rec(n):
  if (n == 0):
    return 0
  return (n % 10) + somme_rec(n // 10)
```

Exercice 2.

1. $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

2. Les trois matrices $E_{1,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{1,2}$ de la base canonique forment clairement une base de $\mathcal{F}$ et cette base est bien orthonormée. $\square$

$\mathcal{F}^\perp$ est de dimension $4 - 3 = 1$ et contient $E_{2,1}$ qui est unitaire donc en constitue une base orthonormée. $\square$

3. La formule de la projection orthogonale (indiquée ici puisque on connait une base orthonormée de $\mathcal{F}$) fournit :

$A' = (E_{1,1}|A)E_{1,1} + (E_{2,2}|A)E_{2,2} + (E_{1,2}|A)E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\square$

D'après le cours $d(A, \mathcal{F}) = \|A - A'\|_2 = \|3E_{2,1}\|_2 = 3$ $\square$

Notons que comme on disposait d'une base orthonormée de $\mathcal{F}^\perp$ on pouvait aussi calculer directement la projection orthogonale de A sur $\mathcal{F}^\perp$: $(E_{2,1}|A)E_{2,1} = 3E_{2,1}$.

Problème.

1. Avec des notations claires, si $AB = C$ il vient :

$|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big(|a_{i,k}|\ |b_{k,j}|\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big(|a_{i,k}|\ \|B\|_\infty\Big) = \|B\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty = \dfrac{1}{n}\|A\|\ \|B\|$.

Par définition du sup il en résulte que $\|C\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n}\|A\|\ \|B\|$ donc $\|C\| \leqslant \|A\|\ \|B\|$ $\square$

2. Le théorème de la convergence absolue est vrai dans tout espace de dimension finie donc en particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Comme la norme $\|.\|$ est une norme d'algèbre, il vient que $\left\|\dfrac{1}{k!}M^k\right\| \leqslant \dfrac{\|M\|^k}{k!}$ terme général de la série exponentielle réelle qui converge. Ainsi la série $\sum \dfrac{1}{k!}M^k$ converge absolument (par principe de comparaison des séries à termes positifs) donc converge. $\square$

4. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son polynôme caractéristique est scindé (car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos) donc M est trigonalisable.
$M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire et P inversible de sorte que classiquement $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}M^k = P \times \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}T^k \times P^{-1}$ (1)
Lorsque $n \to +\infty$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}T^k \to \exp(T)$ et l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même défine par $A \longmapsto PAP^{-1}$ est linéaire donc continue (dimension finie) de sorte que par caractérisation séquentielle de la continuité :
$P \times \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}T^k \times P^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\exp(T)P^{-1}$
Par unicité de la limite dans (1) il vient donc $\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$ donc $\det\big(\exp(M)\big) = \det\big(\exp(T)\big)$
D'après le classique résultat rappelé, $\det\big(\exp(T)\big) = \prod\limits_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} = e^{\mathrm{tr}(M)}$ $\square$

5. $\det(A) = -12$ sans calcul car A est la matrice de l'exemple qui suit et $\chi_A = (X-2)^2(X+3)$ est donné.
Donc il n'existe aucune matrice réelle B telle que $B^2 = A$ (sinon on aurait $\det(A) = \det(B)^2 \geqslant 0$) et il n'existe aucune matrice réelle M telle que $\exp(M) = A$ (sinon on aurait $\det(A) = e^{\mathrm{tr}(M)} \geqslant 0$). $\square$

6.a. $\alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n = \alpha 3^n e^{i\pi n} + \beta n^2 2^n = f(n)$ avec $f(x) = \alpha x^0 3^x e^{i\pi x} + \beta x^2 2^x e^{i0x}$ $\square$

6.b. Comme F est clairement stable par combinaisons linéaires, pour prouver qu'il est stable par translation sur la variable, il suffit de prouver que $x \longmapsto (x+x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)}$ est bien un élément de F. Or :
$(x+x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)} = \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} \sum\limits_{p+q=k} \mathrm{C}_k^p x_0^q x^p \rho^x e^{i\theta x} = \sum\limits_{p=0}^{k} \lambda_p x^p \rho^x e^{i\theta x}$ avec $\lambda_p = \rho^{x_0} e^{i\theta x_0}\, \mathrm{C}_k^p\, x_0^{k-p}$ $\square$

7.a. $\left| n^2 (\frac{2}{3})^n e^{i\theta n} \right| = n^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées. $\square$

7.b. Quitte à permuter les indexations, on peut toujours supposer $\rho_1 \leqslant \rho_2$.
Premier cas : $\rho_1 < \rho_2$. Il vient $\alpha n^{k_1} \lambda^n e^{i(\theta_1-\theta_2)n} + \beta n^{k_2} = 0$ pour tout n avec $0 < \lambda = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} < 1$.
Or de même que dans la question précédente, $n^{k_1}\lambda^n e^{i(\theta_1-\theta_2)n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\beta n^{k_2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui entraîne $\beta = 0$
Reste alors $\alpha n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n} = 0$ pour tout n et en particulier pour $n = 1$: $\alpha\rho_1 e^{i\theta_1} = 0$ donc $\alpha = 0$ car $\rho_1 \neq 0$. $\square$

Deuxième cas : $\rho_1 = \rho_2$. Il vient $\alpha n^{k_1} e^{i\theta n} + \beta n^{k_2} = 0$ (1) pour tout n avec $\theta = \theta_1 - \theta_2 \in]-2\pi, 2\pi[$ et $\theta \neq 0$ (2)
Supposons $\alpha \neq 0$. Il vient $e^{in\theta} = -\dfrac{\beta}{\alpha} n^{k_2-k_1}$ donc $e^{in\theta}$ est réel et de signe fixe pour tout n.
En particulier $e^{i\theta}$ est réel donc est égal à 1 ou -1. Mais $e^{2i\theta} = (e^{i\theta})^2$ est de même signe. Donc $e^{i\theta} = 1$.
Ainsi $\theta = 0$ modulo 2π ce qui est exclu d'après (2). Donc $\alpha = 0$.
D'après (1) il reste alors $\beta n^{k_2} = 0$ pour tout n ce qui entraîne $\beta = 0$. $\square$

7.c. Si f et g sont deux éléments de F vérifiant $f(n) = g(n)$ pour tout entier n alors $f - g$ est un élément de F qui s'annule sur $\mathbb{N}$ donc est nul d'après le résultat admis en préambule de cette question. $\square$

8. Soit $R_n = a_n X^2 + b_n X + c_n$ le reste de la division euclidienne de X^n par χ_A : $X^n = \chi_A Q_n + R_n$ (1).
Par le morphisme de l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et le théorème de Cayley-Hamilton il vient $A^n = R_n(A)$.
Donc (avec des notations claires) $A_{i,j}^{(n)} = \omega_{i,j}(n)$ avec $\omega_{i,j}(n) \underset{\text{DEF}}{=} A_{i,j}^{(2)} a_n + A_{i,j} b_n + \mathrm{Id}_{i,j} c_n$.
Ainsi pour établir le résultat demandé dans l'énoncé, il suffit de prouver que les trois fonctions $n \longmapsto a_n$, $n \longmapsto b_n$ et $n \longmapsto c_n$ appartinnent à $\widetilde{F}$, ensemble des restrictions à $\mathbb{N}$ des éléments de F.
Notons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ le spectre (éventuellement complexe) de A. Remarquons que $\lambda_i \neq 0$ car A est inversible.

Premier cas : les trois valeurs propres sont deux à deux distinctes.
En appliquant la relation (1) en λ_i il vient : $\begin{cases} \lambda_1^2 a_n + \lambda_1 b_n + c_n = \lambda_1^n \\ \lambda_2^2 a_n + \lambda_2 b_n + c_n = \lambda_2^n \\ \lambda_3^2 a_n + \lambda_3 b_n + c_n = \lambda_3^n \end{cases}$
Ce système est de Cramer car de Vandermonde avec les λ_i 2 à 2 distincts.
Les formules de Cramer montrent que a_n, b_n et c_n sont des combinaisons linéaires de λ_1^n, λ_2^n et λ_3^n.
Or (forme trigonométrique) on peut écrire $\lambda_i = \rho_i e^{i\theta_i}$ avec $\rho_i > 0$ car $\lambda_i \neq 0$ donc $n \longmapsto \lambda_i^n = \rho_i^n e^{i\theta_i n} \in \widetilde{F}$.
Par combinaison linéaires il en va de même de $n \longmapsto a_n$, $n \longmapsto b_n$ et $n \longmapsto c_n$. $\square$

Deuxième cas : 2 valeurs propres égales par exemple $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$
En appliquant la relation (1) en λ_1 et λ_2 et en la dérivant en λ_2 (racine double de χ_A) on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1^2 a_n + \lambda_1 b_n + c_n = \lambda_1^n \\ \lambda_2^2 a_n + \lambda_2 b_n + c_n = \lambda_2^n \\ 2\lambda_2 a_n + b_n = n\lambda_2^{n-1} \end{cases}$$

Les formules de Cramer montrent cette fois que a_n, b_n et c_n sont des combinaisons linéaires de λ_1^n, λ_2^n et $n\lambda_2^{n-1} = \dfrac{1}{\lambda_2} n\lambda_2^n$ donc de λ_1^n, λ_2^n et $n\lambda_2^n$ donc sont bien des éléments de $\widetilde{F}$. $\square$

Troisième cas : une seule valeur propre λ.
En appliquant la relation (1) en λ et en la dérivant deux fois en λ (racine triple de χ_A) on obtient :

$$\begin{cases} \lambda^2 a_n + \lambda b_n + c_n = \lambda^n \\ 2\lambda a_n + b_n = n\lambda^{n-1} \\ 2a_n = n(n-1)\lambda^{n-2} \end{cases}$$

Par la remontée on voit de suite que $n \longmapsto a_n = \dfrac{1}{2\lambda^2} n^2 \lambda^n - \dfrac{1}{2\lambda^2} n\lambda^n$ est élément de $\widetilde{F}$ puis $n \longmapsto b_n$ et enfin $n \longmapsto c_n$. $\square$

9. Ainsi $\gamma(n) = A^n$ pour tout entier naturel n.

9.a. En particulier $\gamma(0) = I_3$ et $\gamma(1) = A$. $\square$

9.b. De même, pour tout couple (m,n) d'entiers naturels, $\gamma(m+n) = A^{m+n} = A^m A^n = \gamma(m)\gamma(n)$. $\square$

9.c. D'après la question 6.b, f appartient à F. De même g en tant que combinaison linéaire d'éléments de F.
D'après la question 7.c, pour prouver que $f = g$, il suffit de prouver que $f(n) = g(n)$ pour tout entier naturel n.
Or $f(n) = \omega_{i,j}(n+m)$ est le coefficient d'indice (i,j) de $A^{n+m} = A^n A^m$.

Il est donc égal à $\sum\limits_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(n)\omega_{k,j}(m) \underset{\text{DEF}}{=} g(n)$. Ainsi on a bien $f = g \quad \forall m \in \mathbb{N}$ $\square$

Le terme d'indice (i,j) de $\gamma(x)\gamma(m)$ est (définition du produit matriciel) $\sum\limits_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(m) \underset{\text{DEF}}{=} g(x)$ c'est à dire d'après le résultat précédent $f(x)$ qui est par définition le coefficient d'indice (i,j) de $\gamma(x+m)$.
Donc $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ $\square$

9.d. Pour x fixé quelconque soient les applications définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(y) = \gamma(x+y)$ et $\psi(y) = \gamma(x)\gamma(y)$.
Ces deux applications coïncident sur $\mathbb{N}$ d'après la question précédentes et leurs coefficients sont des éléments de F (question 6.b). Elle sont donc égales par la question 7.c. Ainsi on a bien $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\square$

10. En particulier $\gamma(-1)\gamma(1) = \gamma(1)\gamma(-1) = \gamma(0)$ c'est à dire vu la question 9.a, $\gamma(-1)A = A\gamma(-1) = I_3$. $\square$

Par itération claire de la question précédente on a $\gamma(\sum\limits_{k=1}^{p} x_k) = \prod\limits_{k=1}^{p} \gamma(x_k)$ et en particulier $\Big(\gamma(\dfrac{1}{p})\Big)^p = \gamma(1) = A$ $\square$

11. Un élément de F est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc par combinaison linéaire les applications composantes de l'application γ sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc l'application γ elle-même. $\square$

Pour x fixé quelconque, envisageons $\varphi(t) = \gamma(t+x)$.
φ est dérivable par composition et $\varphi'(t) = \gamma'(t+x)$.
Mais par la question 9.d, on a aussi $\varphi(t) = \gamma(x)\gamma(t) = \phi\big(\gamma(t)\big)$ où ϕ est l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même définie par $\phi(M) = \gamma(x)M$. Donc d'après le cours (dérivation de la composée d'une application dérivable par une application linéaire) $\varphi'(t) = \phi\big(\gamma'(t)\big) = \gamma(x)\gamma'(t)$.

Ainsi $\gamma'(t+x) = \gamma(x)\gamma'(t) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$ et en particulier pour $t = 0$ on obtient $\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

Ainsi γ vérifie le problème de Cauchy pour l'équation différentielle linéaire à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ $\begin{cases} u'(t) = \gamma'(0)u(t) \\ u(0) = I_3 \end{cases}$.

Par théorème de cours l'unique solution de ce problème est $t \longmapsto \exp\big(t\gamma'(0)\big)I_3$. Ainsi $\gamma(t) = \exp\big(t\gamma'(0)\big)$ $\square$

En particulier $\exp\big(\gamma'(0)\big) = \gamma(1) = A$. $\square$

12. Il vient $\chi_A = (X+1)(X-2)^2$ et le rang de $A - 2I_3$ est 2 donc le sous-espace propre associé à 2 est de dimension $3 - 2 = 1$ et donc A n'est pas diagonalisable. $\square$

13. Avec les notations précédentes on a le système suivant : $\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 4a_n + 2b_n + c_n = 2^n \\ 4a_n + b_n = n2^{n-1} \end{cases} \iff \begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ 6b_n - 3c_n = 2^n - 4(-1)^n \\ b_n + c_n = 2^n - n2^{n-1} \end{cases}$

On obtient successivement :
$c_n = \dfrac{5}{9}2^n + \dfrac{4}{9}(-1)^n - \dfrac{1}{3}n2^n$ puis $b_n = \dfrac{4}{9}2^n - \dfrac{4}{9}(-1)^n - \dfrac{1}{6}n2^n$ et enfin $a_n = -\dfrac{1}{9}2^n + \dfrac{1}{9}(-1)^n + \dfrac{1}{6}n2^n$

Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on en déduit $A^n = \begin{pmatrix} 8a_n + 3b_n + c_n & 0 & 4a_n + b_n \\ 4a_n + b_n & a_n - b_n + c_n & a_n - 2b_n \\ -4a_n - b_n & 0 & b_n + c_n \end{pmatrix}$ soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n + \frac{1}{2}n2^n & 0 & \frac{1}{2}n2^n \\ \frac{1}{2}n2^n & (-1)^n & -2^n + (-1)^n + \frac{1}{2}n2^n \\ -\frac{1}{2}n2^n & 0 & 2^n - \frac{1}{2}n2^n \end{pmatrix} \text{ donc } \gamma(t) = \begin{pmatrix} 2^t + \frac{1}{2}t2^t & 0 & \frac{1}{2}t2^t \\ \frac{1}{2}t2^t & e^{i\pi t} & -2^t + e^{i\pi t} + \frac{1}{2}t2^t \\ -\frac{1}{2}t2^t & 0 & 2^t - \frac{1}{2}t2^t \end{pmatrix} \quad \square$$

En particulier $A^{-1} = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ $\square$

D'après la question 10, on peut prendre $B^2 = A$ avec $B = \gamma(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{2} & i & -\frac{3}{4}\sqrt{2} + i \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\square$

D'après la question 11, on peut prendre $M = \gamma'(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & \frac{1}{2} - \ln 2 + i\pi \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} + \ln 2 \end{pmatrix}$ $\square$

FIN