4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

?

4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

$$\lim_{x\to 1}\zeta(x) = \lim_{x\to 1}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\right)}_{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}\ \text{CU sur }]1,\bullet[} \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{1}{n^x}}_{=\frac{1}{n}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ \text{DIV}$$

blocage !!

$$\int_a^b c\,dt = (b-a)c$$

Si $f \searrow$

Hyper Classique

$$\forall t \in [k, k+1],\quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

$$\Longrightarrow \int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dt$$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k)$$

La base

$$\sum_{k=0}^{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} f(k+1) \leq \int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

$n \to +\infty$

$\Downarrow$

...

4) **i) Déterminer la limite de ζ en 1.**

Soit $x > 1$.

On a $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Si $f \searrow$

$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Soit $x > 1$.

$$\int_?^? ?\, dt \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_?^? dt$$

$$f(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$$

4) i) Déterminer la limite de ζ en 1.

Soit $x > 1$.

On a $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Soit $x > 1$.

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \frac{1}{n^x} \cancel{\leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,dt}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \quad \text{DIV}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,dt\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \cancel{\leq \dots}$$

$$t^{1-x} = e^{(1-x)\ln t} \to 0$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}\left(\lim_{t\to+\infty} t^{1-x} - 1\right) = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \int_1^{+\infty} t^{-x}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \zeta(x)$$

$$\left(\forall x > 1,\ \zeta(x) \geq \frac{1}{x-1}\right) \qquad \frac{1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$$

Partie II - Généralités sur la fonction zêta

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

Q9. Pour tout $a > 1$ réel, démontrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n^a}$ converge.

Q10. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, puis qu'elle est décroissante.

Q11. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]1, +\infty[$?

Q12. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$.

Q13. Soit $x > 1$. On pose :

$$I(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

Démontrer que :

$$I(x) \leq \zeta(x) \leq I(x) + 1.$$

En déduire un équivalent de ζ au voisinage de 1.