Mines 2012 MP Maths 2 : Formule sommatoire de Poisson

corrigé par Marc Fleury

A. Préliminaires

1) Soit $f \in \mathcal{L}$ et $g : (x,\xi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$.
Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $g(.,\xi)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ car f et $x \mapsto e^{-2i\pi x\xi}$ le sont.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $g(x,.)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
On a pour tous $x, \xi \in \mathbb{R}$, $|g(x,\xi)| = |f(x)|$ et $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) L'énoncé admet que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^*$ sont des sous-espaces vectoriels de l'espace des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ par comparaison aux fonctions de Riemann.
Notons $\mathcal{F}$ l'application qui à $f \in \mathcal{L}$ associe $\widehat{f} \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Par linéarité de l'intégrale, $\mathcal{F}$ est linéaire.
Or $\mathcal{W} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C}))$ et $\mathcal{W}^* = \mathcal{L}^* \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{L}^*)$.
Par les théorèmes sur les intersections de sous-espaces vectoriels et les images réciproques de sous-espaces vectoriels par une application linéaire, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}^*$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}$.
Par croissance de $\mathcal{F}^{-1}$ (au sens de l'inclusion), $\mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}$ car $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L} \cap \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

3) Soit $f \in \mathcal{L},\ \alpha > 0,\ y, \nu \in \mathbb{R}$.
La fonction $u \mapsto x = \frac{u}{\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\mathbb{R}$ vers lui-même, avec $\frac{dx}{du} = \frac{1}{\alpha}$, donc f_α est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $u \mapsto \frac{1}{\alpha}f(u)$ l'est, et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{f_\alpha}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-2i\pi x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2i\pi\frac{u}{\alpha}\xi}\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\widehat{f}(\frac{\xi}{\alpha})$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\widehat{f_\alpha} = \tfrac{1}{\alpha}(\widehat{f})_{1/\alpha}}$$

De même avec le changement de variable $u \mapsto x = u - y$ on obtient l'intégrabilité de $f_{y,\nu}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f_{y,\nu}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)e^{-2i\pi x(\xi+\nu)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2i\pi(u-y)(\xi+\nu)}du = e^{2i\pi y(\xi+\nu)}\widehat{f}(\xi+\nu)$$

$$\text{Donc } \boxed{\widehat{f_{y,\nu}} = e^{2i\pi y\nu}(\widehat{f})_{\nu,-y}}.$$

Si $f \in \mathcal{W}$ alors $\hat{f} \in \mathcal{L}$, donc $\widehat{f_\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\widehat{f})_{1/\alpha}$ appartient à $\mathcal{L}$ et ainsi $f_\alpha \in \mathcal{W}$; et $\widehat{f_{y,\nu}} = e^{2i\pi y\nu}(\widehat{f})_{\nu,-y}$ appartient à $\mathcal{L}$ donc $f_{y,\nu} \in \mathcal{W}$.
Supposons que $f \in \mathcal{L}^*$. Alors il existe $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que $x \mapsto |x|^\beta|f(x)|$ soit majorée par M et on a pour tout réel x, $|x|^\beta|f_\alpha(x)| = \frac{1}{\alpha^\beta}|\alpha x|^\beta|f(\alpha x)| \leqslant \frac{1}{\alpha^\beta}M$, donc $f_\alpha \in \mathcal{L}^*$. De plus, pour $|x| \geqslant 2|y|$, $|x|^\beta|f_{y,\nu}(x)| = |x|^\beta|f(x+y)| \leqslant |\frac{x}{x+y}|^\beta M \leqslant (\frac{|x|}{|x|-|y|})^\beta M = (1 + \frac{|y|}{|x|-|y|})^\beta M \leqslant 2^\beta M$ et comme par ailleurs $x \mapsto |x|^\beta f_{y,\nu}(x)$ est continue donc bornée sur le segment $[-2|y|, 2|y|]$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $f_{y,\nu} \in \mathcal{L}^*$.
Si de plus $f \in \mathcal{W}^*$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{L}^*$ donc par ce qui précède, $\widehat{f_\alpha} = \frac{1}{\alpha}(\widehat{f})_{1/\alpha}$ appartient à $\mathcal{L}^*$ donc $f_\alpha \in \mathcal{W}^*$; et $\widehat{f_{y,\nu}} = e^{2i\pi y\nu}(\widehat{f})_{\nu,-y}$ appartient à $\mathcal{L}^*$ donc $f_{y,\nu} \in \mathcal{W}^*$.
Ainsi $\mathcal{W}$ et $\mathcal{W}^*$ sont stables par les transformations $f \mapsto f_\alpha$ et $f \mapsto f_{y,\nu}$.

4)

$$\begin{array}{rcl}\text{Pour } \xi \in \mathbb{R}^*,\ \widehat{s}(\xi) &=& \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi x\xi}dx \\ &=& \displaystyle[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}]_{-1/2}^{1/2} \\ &=& \displaystyle\frac{-2i\sin(\pi\xi)}{-2i\pi\xi} \\ &=& \displaystyle\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \\ \text{et } \widehat{s}(0) &=& \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} dx = 1\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\forall\xi \in \mathbb{R}^*,\ \widehat{t}(\xi) &=& \displaystyle\int_{-1}^{0}(1+x)e^{-2i\pi x\xi}dx + \int_{0}^{1}(1-x)e^{-2i\pi x\xi}dx \\ &=& \displaystyle\Big[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}(1+x)\Big]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}dx + \Big[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}(1-x)\Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{-2i\pi\xi}(-1)dx \\ &=& \displaystyle\frac{1}{-2i\pi\xi} - \Big[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{(-2i\pi\xi)^2}\Big]_{-1}^{0} + \frac{1}{2i\pi\xi} + \Big[\frac{e^{-2i\pi x\xi}}{(-2i\pi\xi)^2}\Big]_{0}^{1} \\ &=& \displaystyle\frac{1-e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2} - \frac{e^{-2i\pi\xi}-1}{4\pi^2\xi^2} \\ &=& \displaystyle\frac{2(1-\cos(2\pi\xi))}{4\pi^2\xi^2} \\ &=& \displaystyle\Big(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\Big)^2 \\ \text{et par continuité, } \widehat{t}(0) &=& \displaystyle\lim_{\xi\to 0^+}\widehat{t}(\xi) = 1^2 = 1\end{array}$$

5) $s \in \mathcal{L}$ car s est continue par morceaux donc intégrable sur le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et étant nulle en dehors de ce segment, elle est intégrable sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, donc sur $\mathbb{R}$. (on peut aussi dire que $s(x) = O_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x^2})$.

Par contre, $\widehat{s}$ n'est pas intégrable car pour $k \in \mathbb{N}$, $\int_k^{k+1}|\widehat{s}(\xi)|d\xi \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_k^{k+1}|\sin(\pi\xi)|d\xi = \frac{\int_0^1|\sin(\pi u)|du}{(k+1)\pi}$ par le changement de variable $\xi = u + k$.
Ainsi $\int_k^{k+1}|\widehat{s}(\xi)|d\xi \geqslant \frac{K}{k+1}$ où K est une constante strictement positive, comme intégrale d'une fonction continue positive non identiquement nulle.
Ainsi $\int_0^{n+1}|\widehat{s}| \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$ comme somme partielle d'une série à termes positifs divergente. Donc $\widehat{s}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, $\widehat{s}$ n'appartient pas à $\mathcal{L}$ et donc s n'appartient pas à $\mathcal{W}$. Donc $\mathcal{W}$ est un sous-espace strict de $\mathcal{L}$, et comme $\mathcal{W}^* \subset \mathcal{W}$, il en va de même de $\mathcal{W}^*$.

6) L'énoncé me semble incorrect, il suffit que les f_n et f soient dans $\mathcal{L}$ et non dans $\mathcal{W}$ (cf question 16).
On a pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f_n(x) - f(x)|dx$.
Ainsi $||\widehat{f_n} - \widehat{f}||_\infty \leqslant ||f_n - f||_1$, où $||.||_\infty$ et $||.||_1$ désignent respectivement les normes de la convergence uniforme et en moyenne.
Par le théorème d'encadrement, $||\widehat{f_n} - \widehat{f}||_\infty \underset{\to n_\infty}{\to} 0$, autrement dit la suite $(\widehat{f_n})$ converge uniformément vers $\widehat{f}$.

B. Formule sommatoire de Poisson

7) Précisons que pour donner du sens à $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$ il faut prouver que les séries $\sum(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $\sum(u_{_n})_{n\geqslant 1}$ convergent.

f appartenant à $\mathcal{L}^*$, il existe $\beta > 1$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x|^\beta |f(x)| \leqslant M$.
Soit $K = [a, b]$ un segment de de $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in K$ et tout $n > -a$, $|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{|x+n|^\beta} \leqslant \frac{M}{(a+n)^\beta}$ car $x + n \geqslant a + n > 0$.
Ainsi notant u_n la fonction $x \mapsto f(x+n)$ et $||u_n||_{\infty,K} = sup_{x\in K}|u_n(x)|$, on a $||u_n||_{\infty,K} = O_{n\to\infty}(\frac{1}{n^\beta})$.
Donc la série $\sum(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge normalement et donc uniformément sur K et ainsi sa somme est continue sur K car les u_n le sont.
Il en va de même pour la série $\sum(u_{-n})_{n\geqslant 1}$ car pour $x \in K$ et $n > b$, $|u_{-n}(x)| \leqslant \frac{M}{(n-b)^\beta}$.
Ainsi $\widetilde{f}$ est bien définie et continue sur tout segment, donc sur $\mathbb{R}$.
Enfin, pour tout réel x on a :

$$\widetilde{f}(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x+1+n) + \sum_{n=1}^{\infty} f(x+1-n) = \sum_{n'=1}^{\infty} f(x+n') + \sum_{n'=0}^{\infty} f(x-n') = \widetilde{f}(x)$$

8) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_p(\widetilde{f}) &= \int_0^1 \widetilde{f}(x)^{-2i\pi px} dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(f(x+n)e^{-2i\pi px}\Big) dx \text{ (par linéarité de la sommation)} \end{aligned}$$

Notant $v_n : x \mapsto f(x+n)e^{-2i\pi px}$ et remarquant que dans les notations précédentes, $|v_n| = |u_n|$, la série $\sum(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge normalement donc uniformément sur tout segment (c'est-à-dire que les séries $\sum(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $\sum(v_{-n})_{n\geqslant 1}$ convergent normalement sur tout segment), et en particulier sur $[0, 1]$.
Ainsi

$$\begin{aligned} c_p(\widetilde{f}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)e^{-2i\pi px} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi p(u-n)} du \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi pu} du \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi pu} du + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{-n}^{-n+1} f(u)e^{-2i\pi pu} du \\ &= \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} f(u)e^{-2i\pi pu} du + \lim_{N\to+\infty} \int_{n=-N}^{0} f(u)e^{-2i\pi pu} du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi pu} du + \int_{-\infty}^{0} f(u)e^{-2i\pi pu} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-2i\pi pu} du = \widehat{f}(p) \end{aligned}$$

9) La série de terme général $g_n : x \mapsto \widehat{f}(n)e^{2i\pi nx}$ converge normalement car comme $\hat{f} \in \mathcal{L}^*$, il existe $\beta > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z},\ |\widehat{f}(n)| = O_{n\to\pm\infty}(\frac{1}{|n|^\beta})$.
Donc notant g la somme de la série $\sum(g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, on a pour tout entier relatif p,

$$c_p(g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_0^1 e^{2i\pi nx}e^{-2i\pi px} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\delta_{n,p} = \widehat{f}(p)$$

Comme g est continue (comme somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues) et 1-périodique et a les mêmes coefficients de Fourier que $\widetilde{f}$ qui est continue et 1-périodique par la question 7), ces deux fonctions sont égales. Donc $\widetilde{f}$ est somme de sa série de Fourier.
En particulier,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \widetilde{f}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{2i\pi n0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)$$

C. Application à la formule d'inversion de Fourier

10)

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{x,\xi}(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_{x,\xi}}(n)\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)e^{-2i\pi\xi n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i\pi x(\xi+n)}\widehat{f}(\xi+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_x(\xi+n) = \widetilde{F_x}(\xi)\end{aligned}$$

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Comme la série $\sum(\xi \mapsto f(x+n)e^{-2i\pi\xi n}e^{-2i\pi p\xi})_{n\in\mathbb{Z}}$ converge normalement (cf question 9), on peut intégrer terme à terme sur $[0,1]$ et en déduire

$$c_p(\widetilde{F_x}) = f(x-p)$$

Donc la formule précédente donne le développement de $\widetilde{F_x}$ en série de Fourier.

11) On a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}d\xi &= \widehat{F_x}(0)\\ &= c_0(\widetilde{F_x})\\ &= f(x)\end{aligned}$$

12) La relation précédente s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x)$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \widehat{\widehat{f}}(x)$$

ce qui prouve que $\widehat{f}$ appartient à $\mathcal{W}^*$. La transformation de Fourier induit donc un endomorphisme de $\mathcal{W}^*$.

On a pour tout $f \in \mathcal{W}^*,\ f = \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}$.
Donc si $f \in \mathcal{W}^*$ non nulle vérifie $\widehat{f} = \lambda f$ on a $\lambda^4 f = f$ donc $\lambda^4 = 1$.
Toute valeur propre réelle de la transformation de Fourier dans $\mathcal{W}^*$ est donc égale à 1 ou -1.
Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $f = at + b\widehat{t}$.

$$\widehat{f} = a\widehat{t} + b\widehat{\widehat{t}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(x) = a\widehat{t}(x) + bt(-x) = a\widehat{t}(x) + bt(x) \quad \text{car } t \text{ est paire}$$

De plus t et $\widehat{t}$ sont linéairement indépendantes : si f est nulle alors pour $x > 1$ et x non entier on obtient $t(x) = 0 \neq \widehat{t}(x)$ donc $b = 0$, puis $a = 0$ car t n'est pas la fonction nulle.
Donc pour $a = b \neq 0$, f est vecteur propre associé à la valeur propre 1, et pour $b = -a \neq 0$, f est vecteur propre associé à la valeur propre -1.
Donc 1 et -1 sont bien valeurs propres de la transformation de Fourier dans $\mathcal{W}^*$.

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker

13) Remarquons que $\widehat{f}$ étant continue, elle est nulle sur $]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, \infty[$.
Soit $\xi \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ et $x \in \mathbb{R}$.
Dans la formule de Poisson généralisée, le membre de droite se réduit à un seul terme, d'où :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)e^{-2i\pi n\xi} = \widehat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}$$

Pour $x = 0$, on obtient :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)e^{-2i\pi n\xi} = \widehat{f}(\xi)$$

Donc $\widehat{f}$ est uniquement déterminée par les valeurs de f sur $\mathbb{Z}$. Par la formule d'inversion de Fourier, f est uniquement déterminée par $\widehat{f}$, donc par les valeurs de f sur $\mathbb{Z}$.

14) Soit $g : \xi \mapsto t(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon}) - t(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon})$.

Si le premier terme n'est pas nul alors $-1\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon} < 1$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}-\varepsilon < \xi < \frac{1}{2}+\varepsilon$, et si le second terme n'est pas nul alors $-\frac{1}{2}-\varepsilon < \xi < -\frac{1}{2}+\varepsilon$

On en déduit que g n'annule en dehors de l'intervalle $]-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon[$.

Par la question 4), $\widehat{t} : \xi \mapsto \begin{cases} (\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi})^2 & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ appartient à $\mathcal{L}^*$ car $\xi \mapsto \xi^2\widehat{t}(\xi)$ est bornée (et $2 > 1$).

Ainsi $t \in \mathcal{W}^*$.

Par la question 3), les deux termes $(t_{1/\varepsilon})_{-\frac{1}{2},0}$ et $(t_{1/\varepsilon})_{\frac{1}{2},0}$ dont g est la différence appartiennent également à $\mathcal{W}^*$, donc il en va de même pour g car $\mathcal{W}^*$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Par la formule d'inversion de Fourier, $f : x \mapsto \widehat{g}(-x)$ appartient à $\mathcal{W}^*$ et vérifie $\widehat{f} = g$.

Soit n un entier relatif.

$$\begin{aligned} f(-n) &= \widehat{g}(n) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-2i\pi n\xi}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t(\frac{\xi-\frac{1}{2}}{\varepsilon})e^{-2i\pi n\xi}d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} t(\frac{\xi+\frac{1}{2}}{\varepsilon})e^{-2i\pi n\xi}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t(u)e^{-2i\pi n(\varepsilon u+\frac{1}{2})}\varepsilon du - \int_{-\infty}^{\infty} t(u)e^{-2i\pi n(\varepsilon u-\frac{1}{2})}\varepsilon du \\ &= (-1)^n\varepsilon(\widehat{t}(n\varepsilon) - \widehat{t}(n\varepsilon)) \\ &= 0 \quad \text{(on peut aussi faire le calcul en appliquant la question 3))} \end{aligned}$$

Donc f est nulle sur $\mathbb{Z}$.

Or f n'est pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ car sinon $\widehat{f} = g$ serait nulle, ce qui n'est pas le cas car pour ξ strictement inférieur à et suffisament proche de $\frac{1}{2}+\varepsilon$, le premier terme de $g(\xi)$ est non nul et le second l'est.

Donc il existe deux fonctions distinctes (f et la fonction nulle) appartenant à $\mathcal{W}^*$, prenant les mêmes valeurs sur $\mathbb{Z}$, appartenant à $\mathcal{W}^*$ et dont les transformées de Fourier sont nulles en dehors de $[-\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon]$.

E. Contre-exemple de Katznelson

15) Soit $x \in \mathbb{Z}$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$, posant $y = x - n \in \mathbb{Z}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k(y) = t(2^k y) - t(2^{k+1}y) = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } y \neq 0 \text{ car alors } |y| \geqslant 1 \text{ donc } |2^{k+1}y| \geqslant |2^k y| \geqslant 1 \\ 1 - 1 = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $u_{k,N_k}(x) = 0$ et $f(x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $0 \neq u_k(x-n) = t(2^k(x-n)) - t(2^{k+1}(x-n))$ alors $|x-n| < \frac{1}{2^k}$.

Soit $d = \min(x - E(x), E(x) + 1 - x)$. Alors pour tout entier relatif n on a $|x - n| \geqslant d$ car $n \leqslant x$ ou $n \geqslant E(x) + 1$ (ainsi d est la distance de x à $\mathbb{Z}$). Pour k suffisamment grand ($k \geqslant E(\log_2(\frac{1}{d}) + 1)$, tous les $u_k(x-n), n \in \mathbb{Z}$ sont nuls donc $u_{k,N_k}(x)$ est nul. Donc $f(x)$ est bien défini comme somme d'une série dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $E(a) = E(b)$ et notant $d = \min(a - E(a), E(a) + 1 - b]$ on a pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $|x - n| \geqslant d$, donc sur $[a, b]$, f est somme d'un nombre fini de termes continus donc f est continue.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

16)

$$
\begin{aligned}
\forall k\in\mathbb{N},\ \forall N\in\mathbb{N}^*,\ \int_{-\infty}^{\infty}|u_{k,N}(x)|dx &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\int_{-\infty}^{\infty}|u_k(x-n)|dx\\
&= \frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\int_{-\infty}^{\infty}|u_k(y)|dy\\
&= \frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\int_{-\infty}^{\infty}|t(v)-t(2v)|\frac{dv}{2^k}\\
&= \frac{M}{2^k}\frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\\
&= \frac{2M}{2^k}
\end{aligned}
$$

avec $M=\int_{-\infty}^{\infty}|t(v)-t(2v)|dv$, car $\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\leqslant\sum_{|n|<N}1=2(N-1)+1\leqslant 2N$.
Donc la série de terme général $\int_{-\infty}^{\infty}|u_{k,N_k}(x)|dx=O(\frac{1}{2^k})$ converge.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Lebesgue, f est intégrable et on peut intégrer terme à terme. Une version plus fine mais hors-programme de ce théorème dit qu'il y a convergence en moyenne. On peut remarquer qu'on a ici une série à termes positifs donc $\int_{\mathbb{R}}|f(x)-\sum_{k=0}^{K}u_{k,N_k}(x)|dx=\int_{\mathbb{R}}(f(x)-\sum_{k=0}^{K}u_{k,N_k}(x))dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx-\sum_{k=0}^{K}\int_{\mathbb{R}}u_{k,N_k}(x))dx\underset{K\to\infty}{\to}0$. On peut aussi faire la preuve dans le cas général :

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)-\sum_{k=0}^{K}u_{k,N_k}(x)|dx=\int_{\mathbb{R}}|\sum_{k=K+1}^{\infty}u_{k,N_k}(x)|dx$$

et comme pour $K\leqslant L$ on a $\int_{\mathbb{R}}|\sum_{k=K+1}^{L}u_{k,N_k}(x)|dx\leqslant\sum_{k=K+1}^{L}\int_{\mathbb{R}}|u_{k,N_k}(x)|dx$, on obtient en passant à la limite quand $L\to\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}}|\sum_{k=K+1}^{\infty}u_{k,N_k}(x)|dx\leqslant\sum_{k=K+1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}|u_{k,N_k}(x)|dx\underset{K\to\infty}{\to}0$$

donc par le théorème d'encadrement,

$$\int_{\mathbb{R}}|\sum_{k=K+1}^{\infty}u_{k,N_k}(x)|dx\underset{K\to\infty}{\to}0$$

Par la question 6, comme f est dans $\mathcal{L}$ ainsi que les u_{k,N_k} (il suffit d'avoir une série à termes et à somme dans $\mathcal{L}$ et non dans $\mathcal{W}$), on en déduit que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$ converge uniformément vers $\widehat{f}$.

17)

$$
\begin{aligned}
\widehat{u_{k,N}}(\xi) &= \frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\int_{\mathbb{R}}u_k(x-n)e^{-2i\pi x\xi}dx\\
&= \frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})\int_{\mathbb{R}}u_k(y)e^{-2i\pi(y+n)\xi}dy\\
&= \frac{1}{N}\sum_{|n|<N}(1-\frac{|n|}{N})e^{-2i\pi n\xi}\int_{\mathbb{R}}u_k(y)e^{-2i\pi y\xi}dy\\
&= \frac{1}{N}K_N(-\xi)\widehat{u_k}(\xi)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|\widehat{u_{k,N}}(\xi)|d\xi &= \sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{p}^{p+1}|\widehat{u_{k,N}}(\xi)|d\xi\\
&= \frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\int_{p}^{p+1}K_N(\xi)|\widehat{u_k}(\xi)|d\xi
\end{aligned}
$$

car $K_N : \xi \mapsto \frac{1}{N}\left(\frac{\sin \pi N\xi}{\sin \pi\xi}\right)^2$ est à valeurs positives et paire.
Or

$$\begin{aligned}\int_p^{p+1} K_N(\xi)|\widehat{u_k}(\xi)|d\xi &\leqslant \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u_k}| \int_p^{p+1} K_N(\xi)d\xi \\ &= \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u_k}| \sum_{|n|<N} (1-\frac{|n|}{N}) \int_p^{p+1} e^{2i\pi n\xi}d\xi \\ &= \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u_k}| \sum_{|n|<N} (1-\frac{|n|}{N})\delta_{n,0} \\ &= \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u_k}|\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u_{k,N}}(\xi)|d\xi \leqslant \frac{1}{N}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \sup_{[p,p+1]} |\widehat{u_k}|$$

le membre de droite étant bien la somme d'une série convergente car comme $u_k = t_{2^k} - t_{2^{k+1}}$ et $t \in \mathcal{W}^*$, u_k appartient à $\mathcal{W}^*$ (par 3)) donc $\widehat{u_k}$ appartient à $\mathcal{L}^*$ et ainsi il existe $\alpha > 1$ tel que $\sup_{[p,p+1]} |\widehat{u_k}| = O_{p\to\pm\infty}(\frac{1}{|p|^\alpha})$.

18) Choisissons les N_k tels que $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \geqslant k^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{[n,n+1]} |\widehat{u_k}|$ (par exemple $N_k = E(\ldots)+1$)).
On peut alors appliquer le théorème de Lebesque et en conclure que $\widehat{f}$ est intégrable et que la série de terme général $\widehat{u_{k,N_k}}$ converge en moyenne (pour ce raffinement hors-programme, cf question 16) vers $\widehat{f}$.
Par la question 6, on en déduit que la série de terme général $\widehat{\widehat{u_{k,N_k}}}$ converge uniformément vers$\widehat{\widehat{f}}$.
Or les u_{k,N_k} sont dans $\mathcal{W}*$ comme combinaisons linéaires d'éléments de ce sous-espace. Donc la formule d'inversion de Fourier s'applique aux u_{k,N_k}.
Ainsi la série de terme général u_{k,N_k} converge vers $x \mapsto \widehat{\widehat{f}}(-x)$.

19) On a vu que f est nulle sur $\mathbb{Z}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = 0$.
Par ailleurs (cf question précédente), pour tout entier relatif p,

$$\widehat{u_{k,N}}(p) = \frac{1}{N}K_N(-p)\widehat{u_k}(p)$$

et comme K_N est continue sur $\mathbb{R}$ (combinaison linéaire de fonctions continues) et 1-périodique, $K_N(p) = \lim_{x\to 0, x\neq 0} K_N(x) = \frac{N^2}{N} = N$.
D'où $\widehat{u_{k,N}}(p) = \widehat{u_k}(p)$.

$$\widehat{f}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{u_k}(p)$$

Par la question 3,

$$\widehat{u_k}(p) = \frac{1}{2^k}\widehat{t}(\frac{p}{2^k}) - \frac{1}{2^{k+1}}\widehat{t}(\frac{p}{2^{k+1}})$$

$$\widehat{f}(p) = \widehat{t}(p) - 0\widehat{t}(0) = \widehat{t}(p)$$

car $\widehat{t}$ est continue et $\frac{p}{2^{k+1}} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(p) &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \widehat{t}(p) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} t(n) \text{ car la formule sommatoire de Poisson s'applique à } t \in \mathcal{W}^* \\ &= t(0) = 1 \quad \text{(on peut aussi utiliser l'expression de } \widehat{t} \text{ obtenue en 4))}\end{aligned}$$

Donc f ne vérifie pas la formule sommatoire de Poisson. Ainsi f n'appartient pas à $\mathcal{W}^*$.

F. Application à la resommation d'Ewald

20) Remarquons que $g \in \mathcal{L}^*$ donc, comme $\widehat{g} = g$, $g \in \mathcal{W}^*$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n/100)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n/100)^2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) - \frac{1}{2} \qquad \text{avec } h = g_{\frac{1}{100}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(n) - \frac{1}{2} \qquad \text{car } g \in \mathcal{W}^* \text{ donc par 3), } h \in \mathcal{W}^* \end{aligned}$$

Par 3), $\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{h}(\xi) = 100\widehat{g}(100\xi) = 100g(100\xi)$ car $\widehat{g} = g$.
Ainsi

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} 100e^{-\pi 10000n^2} - \frac{1}{2} \\ &= 100\frac{1}{2}(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2}) - \frac{1}{2} \\ &= 49,5 + 100\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2} \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 2$, $n^2 = 1 + (n^2 - 1) = 1 + (n-1)(n+1) \geqslant 1 + (n+1)$, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2} &= e^{-\pi 10000}\Big(1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi 10000(n^2-1)}\Big) \\ &\leqslant e^{-\pi 10000}\Big(1 + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\pi 10000(n+1)}\Big) = e^{-\pi 10000}(1 + \frac{e^{-\pi 30000}}{1 - e^{-\pi 10000}}) \\ &\leqslant \Big(1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}\Big)e^{-\pi 10000} = 2e^{-\pi 10000} \end{aligned}$$

car $0 < e^{-\pi 30000} \leqslant e^{-\pi 10000} \leqslant e^{-1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Or $e^{\pi} > 6,25 \times 2,5 > 12$ car $e \geqslant 2,5$ et $\pi \geqslant 3$.
Donc $e^{-\pi 10000} \leqslant \frac{1}{1,2^{10000}} 10^{-10000}$,
et par convexité de la fonction $x \mapsto x^{10000}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a $1,2^{10000} \geqslant 1 + 10000 \times 0,2 = 2001$ d'où $0 < 100\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi 10000n^2} \leqslant 100\frac{2}{2001}10^{-10000} \leqslant 10^{-10000}$.
Ainsi $49,5$ est une valeur approchée de S à 10^{-10000} près par défaut.