MATHÉMATIQUES 1

Corrigé par Taoufiki said

A. Préliminaires

1. Soient X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1,...,n\}$ et $m \in \{1,...,n\}$.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{m-1} kP(X=k) + \sum_{k=m}^{n} kP(X=k) \\
&\leq \sum_{k=1}^{m-1} (m-1)P(X=k) + \sum_{k=m}^{n} nP(X=k) \\
&= (m-1)\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} P(X=k)}_{\leq 1} + n\underbrace{\sum_{k=m}^{n} P(X=k)}_{=P(X\geq m)} \\
&\leq m-1+nP(X\geq m)
\end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
n\ln n - n + 1 &= [t\ln t - t]_1^n = \int_1^n \ln t dt = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t dt \\
&\leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln k dt = \sum_{k=2}^{n} \ln k = \sum_{k=1}^{n} \ln k
\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{e}\right)^n &= \exp\left(n\ln(\frac{n}{e})\right) = \exp\left(n\ln(n) - n\right) \\
&\leq \exp\left(n\ln(n) - n + 1\right) \\
&\leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln k\right) \\
&= \exp(\ln(n!)) = n!
\end{aligned}$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_n est borné est non vide, donc il admet une borne supérieure et une borne inférieure.
On a : $U_{n+1} \subseteq U_n$, donc

$$\begin{cases} \overline{u}_{n+1} = \sup U_{n+1} \leq \sup U_n = \overline{u}_n \\ \underline{u}_{n+1} = \inf U_{n+1} \geq \inf U_n = \underline{u}_n \end{cases}$$

d'où $\underline{u}$ est $\nearrow$ et $\overline{u}$ est $\searrow$. Elles sont respctivement majorée et minorée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underline{u}_1 \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}_1$$

D'où la convergence de $\underline{u}$ et $\overline{u}$.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq \sup U_n = \overline{u}_n$ et $\overline{u}$ est $\searrow$, donc $\overline{u}$ est une suite décroissante plus grande que u.

   • Soit v une suite décroissante plus grande que u. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall k \geq n \ , \ u_k \leq v_k \leq v_n \qquad (\text{ car } \ v \searrow)$$

donc $\overline{u}_n = \sup U_n \leq v_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où $\overline{u}$ est la plus petite suite qui est décroissante et plus grande que u.
De même façon, on montre que $\underline{u}$ est la plus grande suite qui est croissante et plus petite que u (ou bien en utilisant le fait que $\underline{u} = -\overline{(-u)}$).

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall k \geq n \ , \ u_k \leq v_k \leq \overline{v}_k \leq \overline{v}_n$$

donc $\quad \overline{u}_n = \sup\{u_k \ , \ k \geq n\} \leq \overline{v}_n$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n \leq \lim_{n\to+\infty} \overline{v}_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} v_n$$

par passage à la limite.

6. Comme $\overline{u}$ est $\searrow$ et $\underline{u}$ est $\nearrow$ donc $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si $\lim(\overline{u} - \underline{u}) = 0$.
Supposons que $\lim(\overline{u} - \underline{u}) = 0$ **et montrons que** u **est convergente :**
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n > N \ , \ 0 \leq \overline{u}_n - \underline{u}_n = |\overline{u}_n - \underline{u}_n| < \varepsilon$$

Soit $(k, k') \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que $k, k' > N$. Posons $n = \min(k, k') > N$ et supposons que $u_k \geq u_{k'}$ (k et k' jouent un rôle symétrique). On a :

$$|u_k - u_{k'}| = u_k - u_{k'} \leq \overline{u}_n - \underline{u}_n < \varepsilon$$

La suite u est donc de Cauchy, donc elle est convergente.
Supposons la convergence de u vers un réel l et montrons que $\lim(\overline{u}-\underline{u})=0$:
Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n>N\ ,\ l-\varepsilon<u_n<\varepsilon+l$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n>N$. Pour tout $k\geq n$, on a :

$$l-\varepsilon<u_k<\varepsilon+l$$

donc $\quad l-\varepsilon<u_n\leq\overline{u}_n\leq\varepsilon+l$, d'où la suite $\overline{u}$ est convergente vers l.
De même, on montre que $\underline{u}$ converge vers l, puis, on en déduit que

$$\lim(\overline{u}-\underline{u})=0$$

7. Comme $qn+r=m\geq 2n$ alors $(q-1)n\geq n-r>0$ donc $q>1$.
Par sous-additivité, on a

$$u_m\leq u_{n(q-1)}+u_{n+r}$$

on vérifie par une récurrence facile que la sous-additivité entraîne

$$u_{(q-1)n}\leq(q-1)u_n$$

d'où $\quad u_m\leq(q-1)u_n+u_{n+r}$.
En divisant par m et en utilisant la définition de (q,r), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_m}{m} &\leq (q-1).\frac{u_n}{m}+\frac{u_{n+r}}{m}\\ &= \frac{m-n-r}{n}.\frac{u_n}{m}+\frac{u_{n+r}}{m}\\ &\leq \frac{m-n-r}{m}.\frac{u_n}{n}+\frac{\max\{u_n,...,u_{2n-1}\}}{m}\end{aligned}$$

8. On fixe $n\in\mathbb{N}^*$ et on pose $M=\max\{u_n,...,u_{2n-1}\}$. Pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ tel que $m\geq 2n$, on écrit la division euclidienne par n et on obtient :

$$0\leq\frac{u_m}{m}\leq\frac{m-n}{m}.\frac{u_n}{n}+\frac{M}{m}\qquad(*)$$

La suite $\left(\frac{m-n}{m}.\frac{u_n}{n}+\frac{M}{m}\right)_{m\geq 2n}$ converge, donc elle est majorée puis $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\geq 2n}$ est bornée, d'où la bornétude de la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\geq 1}$.

En utilisant **Q.5**, le passage à la limite supérieure dans l'inégalité $(*)$ entraîne

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} &\leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{m-n}{m}.\frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, ..., u_{2n-1}\}}{m} \\
&= \lim_{m\to+\infty} \frac{m-n}{m}.\frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, ..., u_{2n-1}\}}{m} \qquad \text{(car convergente : } \mathbf{Q.6}\text{)} \\
&= \frac{u_n}{n}
\end{aligned}$$

Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9. On pose $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall k \geq n \ , \ \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq v_k$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \underline{v}_n$, ce qui donnera

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m}$$

Comme $\underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m} \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{u_m}{m}$, alors la limite supérieure et la limite inférieure sont égales, ce qui donne la convergence de la suite par **Q.6**.

C. Une application probabiliste

10. • On suppose que $P(X_1 < x) = 1$ et on pose $\Omega' = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x)$.

Par indépendance, on a

$$P(\Omega') = P(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i < x)$$

Comme les X_i ont même loi alors, pour tout $i = 1, ..., n$,

$$P(X_i < x) = P(X_1 < x)$$

D'où $\quad P(\Omega') = (P(X_1 < x))^n = 1$.

Si $\omega \in \Omega'$, alors $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) < nx$ donc $Y_n(\omega) < x$. On a donc $\Omega' \subseteq (Y_n < x)$

d'où $P(Y_n < x) = 1$.

- On suppose que $P(X_1 \geq x) > 0$. Pour $\omega \in \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geq x)$, on a

$$Y_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \geq x$$

D'où $\quad P(Y_n \geq x) \geq P(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \geq x)) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq x) = (P(X_1 \geq x))^n > 0.$

11. Soit $\omega \in (Y_m \geq x) \cap \left(\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x \right)$. On a : $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq x$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq x$

donc $\sum_{k=1}^{m} X_k(\omega) \geq mx$ et $\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k(\omega) \geq nx$, d'où $Y_{n+m} \geq x$ et $\omega \in (Y_{n+m} \geq x)$.

On en déduit que $P(\{Y_{n+m} \geq x\}) \geq P(\{Y_m \geq x\} \cap \{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\})$ Les X_i sont indépendantes donc Y_m et $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ le sont aussi, puis $P(\{Y_m \geq x\} \cap \{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\}) = P(\{Y_m \geq x\}).P(\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\})$ Les X_i ont la même loi donc $\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ ont la même loi, donc $P(\{\frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geq x\}) = P(\{Y_n \geq x\})$ puis

$$P(\{Y_{n+m} \geq x\}) \geq P(\{Y_n \geq x\}).P(\{Y_m \geq x\})$$

12. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Cas 1 : Si $P(X_1 < x) = 1$
Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}} = (1 - P(Y_n < x))^{\frac{1}{n}} = 0$.
D'où la convergence de la suite $\left((P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
Cas 2 : Si $0 \leq P(X_1 < x) < 1$
Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < P(Y_n \geq x) \leq 1$.
On pose $u_n = -\ln(P(Y_n \geq x)) \geq 0$. Par **Q.11**, la suite (u_n) est sous-additive, donc $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (par **Q.9**). L'image de cette suite

par la fonction continue exp n'est que la suite $\left((P(Y_n \geq x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, d'où sa convergence.

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

13. • Pour $s = 1$, il n'y a rien à démontrer.
    • Supposons que la propriété est valable jusqu'au rang s et montrons la au rang $s + 1$:
    Soit z une valeur de la dernière pile. Il existe une valeur b_s dont le jeton est à la $s-$ème pile tel que $b_s > z$ car sinon on ne va pas mettre le jeton de valeur z à la $(s+1)-$ème pile. On pose $b_{s+1} = z$ et on supprime tous les éléments de la dernière pile de la liste a sans changer l'ordre des autres, la liste obtenue sera notée a'. Si on applique le processus énoncé sur a', on va obtenir les s premières piles du processus initial, l'hypothèse de récurrence entraîne qu'il existe pour la valeur b_s une suite $b' = (b_1, ..., b_s)$ extraite de a', décroissante telle que b_i est la valeur d'un jeton qui se trouve à la $i-$ème pile. La suite $b = b', z$ répond bien à notre question.
14. Si a possède une liste extraite croissante de longueur $p+1$, alors c'est ce qu'on veut, sinon, les $p + 1$ premiers éléments ne seront pas tous dans la première pile, soit v_1 la première valeur entre eux qui va être dans la deuxième pile. On a aussi $v_1, a_{p+2}, ..., a_{2p+1}$ n'est pas croissante, donc l'une au moins des valeurs $a_{p+2}, ..., a_{2p+1}$ ne sera pas dans la deuxième pile, en itérant, on trouve que énoncé précédement donnera au moins $q + 1$ piles, d'où l'existence d'une suite extraite de a, à $q + 1$ éléments et décroissante, d'après **Q.13**.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

15. On a $P(A_1 = 1) = P(B \in \{\sigma \in S_n\ ,\ \sigma(1) = 1\}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$
    (et de même $P(A_2 = 1) = \frac{1}{n}$) donc $0 = P(A_1 = 1, A_2 = 1) \neq P(A_1 = 1).P(A_2 = 1)$ d'où les $A_1, ..., A_n$ ne sont pas indépendantes.
16. $P(A^s) = P(A_{s_1} < ... < A_{s_k}) = P(B \in E)$ avec $E = \{\sigma \in S_n\ ,\ \sigma(s_1) < ... < \sigma(s_k)\}$
    donc $P(A^s) = \frac{Card(E)}{Card(S_n)}$. Le choix d'un élément $\sigma \in E$ consiste à choisir une $k-$ partie de $\{1, ..., n\}$ avec $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ possibilité puis l'ordonner et choisir $(n-k)$ éléments deux à deux distincts dans le reste de $\{1, ..., n\}$ avec $(n-k)!$

possibilités,

d'où $Card(E) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (n-k)! = \frac{n!}{k!}$, par suite $P(A^s) = \frac{1}{k!}$.

17. Pour $k = 1, ..., n$, on note par E_c^k, l'ensemble de $\sigma \in S_n$ tel que la plus longue liste croissante extraite de $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$, est de longueur k. On note aussi par E_d^k, l'ensemble de $\sigma \in S_n$ tel que la plus longue liste décroissante extraite de $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$, est de longueur k. On considère aussi la bijection φ qui associe à chaque $\sigma \in S_n$, la permutation $\varphi(\sigma)$ définie par :

$$\varphi(\sigma) = (\sigma(n), ..., \sigma(1))$$

On a bien $\varphi(E_c^k) = E_d^k$ donc $Card(E_c^k) = Card(E_d^k)$.
D'où, pour tout $k = 1, ..., n$,

$$P(C_n = k) = P(B \in E_c^k) = \frac{Card(E_c^k)}{n!} = \frac{Card(E_d^k)}{n!} = P(B \in E_d^k) = P(D_n = k)$$

Montrons que $E(C_n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$:
Si $n = 1 + pq$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, alors, par Le théorème de Erdös-Szekeres, on a

$$P[(C_n \geq p+1) \cup (D_n \geq q+1)] = 1$$

Par sous-additivité de probabilité, on a :

$$P(C_n \geq p+1) + P(D_n \geq q+1) \geq 1$$

L'inégalité de Marcov et le fait que C_n et D_n ont même loi permettent d'écrire

$$\begin{aligned} 1 &\leq P(C_n \geq p+1) + P(D_n \geq q+1) \\ &\leq \frac{E(C_n)}{p+1} + \frac{E(D_n)}{q+1} \\ &= E(C_n)\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}\right) \end{aligned}$$

Si $\sqrt{n} = k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ (i.e. $n \geq 4$), on pose $p = k+1$ et $q = k-1$, on a $n = pq + 1$ donc

$$1 \leq E(C_n)\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}\right) = E(C_n)\left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{2E(C_n)}{k} = \frac{2E(C_n)}{\sqrt{n}}$$

Si $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, on pose $p = q = [\sqrt{n}]$ et $n' = pq + 1$. L'étude précédente permet d'écrire

$$E(C_{n'}) \geq \frac{p+1}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

D'autre part l'inégalité $p < \sqrt{n}$ entraîne $n' - 1 = p^2 < n$ donc $n' \leq n$ puis $C_{n'} \leq C_n$ et par suite $E(C_{n'}) \leq E(C_n)$ et l'inégalité est établie.

18. Notons $L_c^k = \{s \in [|1,n|]^k \ , \ s \nearrow\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\omega \in (C_n \geq k) &\iff \exists s=(s_1,...,s_k) \in L_c^k \text{ tel que } (A_{s_1}(\omega),...,A_{s_k}(\omega)) \nearrow \\
&\iff \exists s=(s_1,...,s_k) \in L_c^k \text{ tel que } \omega \in A^s \\
&\iff \omega \in \bigcup_{s \in L_c^k} A^s
\end{aligned}$$

D'où $\quad P(C_n \geq k) = P\left(\bigcup_{s \in L_c^k} A^s\right) \leq \sum_{s \in L_c^k} P(A^s)$.

Le choix d'un $s \in L_c^k$ consiste à choisir une $k-$partie de $[|1,n|]$ et l'ordonner, ce qui donne $Card(L_c^k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$. Par **Q.16**, on a $\quad \forall s \in L_c^k \ , \ P(A^s) = \frac{1}{k!}$.
D'où

$$P(C_n \geq k) \leq \frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{k!}$$

19. On pose $k = -[-\alpha e\sqrt{n}]$. On suppose que $n \geq 2$ (le cas où $n=1$ est trivial), puisque $\alpha > 1$ alors $\alpha\sqrt{n}e > 3$ donc $-k \leq -4$ puis $k \geq 4$, par définition de la partie entière, on a :

$$k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leq k$$

On a $\quad P(C_n \geq \alpha e\sqrt{n}) \leq P(C_n \geq k-1)$, et par **Q.18**, on a :

$$\begin{aligned}
P(C_n \geq k-1) &\leq \frac{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}}{(k-1)!} \\
&= \frac{\frac{n!}{(n-k+1)!}}{((k-1)!)^2} \\
&\leq \frac{n!}{(n-k+1)!}.\left(\frac{e}{k-1}\right)^{2k-2} \qquad (\mathbf{Q.2})
\end{aligned}$$

On a $\quad \frac{1}{\alpha\sqrt{n}} < \frac{e}{k-1} < 1 \;$ et $\; 6 \leq 2k-2 \leq 2\alpha e\sqrt{n} \;$ donc

$$\left(\frac{e}{k-1}\right)^{2k-2} \leq \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{n}}\right)^{2k-2} \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$

Par suite

$$\frac{n!}{(n-k+1)!}.\left(\frac{e}{k-1}\right)^{2k-2} \leq \frac{n}{n}.\frac{n-1}{n}...\frac{n-k+2}{n}.\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}} \leq \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}$$

D'où l'inégalité cherchée.

20. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\alpha_n = 1 + n^{-1/4} > 1$. Par **Q.19**, il existe un entier non nul k_n vérifiant $k_n - 1 < \alpha_n e\sqrt{n} \leq k_n$ et aussi

$$P(C_n \geq k_n) \leq P(C_n \geq \alpha_n e\sqrt{n}) \leq \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}}$$

L'inégalité de **Q.1** reste valable même si $m > n$ donc

$$E(C_n) \leq k_n - 1 + nP(C_n \geq k_n)$$

puis

$$E(C_n) \leq \alpha_n e\sqrt{n} + nP(C_n \geq k_n) = \sqrt{n}[(1 + n^{-1/4})e + \underbrace{\sqrt{n}P(C_n \geq k_n)}_{:=\varepsilon_n}]$$

D'où

$$\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}} \leq (1 + n^{-1/4})e + \varepsilon_n \qquad (**)$$

Il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}} = 0$:

On a

$$\alpha_n \ln(\alpha_n) = \frac{1}{n^{1/4}} + \frac{1}{n^{1/2}} + o\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

donc

$$\exp\left(2e\sqrt{n}\alpha_n \ln(\alpha_n)\right) = \exp(2e + o(n^{1/4}))\exp(n^{1/4})$$

d'où

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{2\alpha_n e\sqrt{n}} = \frac{n^{1/2}}{\exp(n^{1/4})}.\frac{1}{\exp(2e + o(n^{1/4}))} \to 0$$

• L'inégalité $(**)$ entraîne que la suite $\left(\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée car elle est plus petite qu'une suite convergente. Elle est aussi minorée par 0 car C_n prend des valeurs positives, d'où la bornétude de $\left(\frac{E(C_n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
D'après **Q.3**, une suite bornée admet une limite supérieure, d'où l'existence de $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\dfrac{E(C_n)}{\sqrt{n}}$. Le passage à la limite supérieure dans $(**)$ et la convergence de la suite de droite vers e nous donne l'inégalité cherchée.

Pour vos remarques, contactez moi sur "taoufiki-maths@hotmail.fr