Extrait CCINP 2020

MP

PROBLÈME

Dans ce problème, E est un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire que l'on notera $\langle\ |\ \rangle$ de norme associée $\|\ \|$.

Un endomorphisme u de E est une similitude de E lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout vecteur x de E, $\|u(x)\| = k\|x\|$. On dira que u est la similitude de rapport k.

On notera $\mathrm{Sim}(E)$, l'ensemble des similitudes de E.

$\mathrm{O}(E)$ désigne l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E.

L'objectif de ce problème est de définir et de caractériser les similitudes d'un espace euclidien.

Partie I - Exemples, propriétés

1. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est, dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la matrice d'une similitude u dont on précisera le rapport.

2. Démontrer que tout élément de $\mathrm{Sim}(E)$ est bijectif et établir que $\mathrm{Sim}(E)$, muni de la loi de composition, est un groupe.

3. Soient u un endomorphisme de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
Démontrer que u est un automorphisme orthogonal de E, si et seulement si, ${}^tA.A = I_n$.
Caractériser par une relation matricielle une similitude de rapport k.

4. Exemple
Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ d'une similitude u dont on donnera le rapport. Donner la matrice de la similitude u^{-1}.
Vérifier que, pour tout élément f de $\mathrm{O}(E)$, $u^{-1} \circ f \circ u \in \mathrm{O}(E)$.

5. On appelle sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$, l'ensemble des vecteurs x de E tels que $\|x\| = r$. Démontrer que si u est un endomorphisme de E tel que l'image par u de toute sphère de E de centre 0 est une sphère de E de centre 0, alors u est une similitude de E.

On pourra remarquer que pour y vecteur non nul, $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$.

Partie II - Assertions équivalentes

6. On rappelle qu'une homothétie vectorielle de E est une application de la forme $\alpha\, id_E$.
Démontrer que $u \in \mathrm{Sim}(E)$, si et seulement si, u est la composée d'une homothétie vectorielle non nulle de E et d'un élément de $O(E)$.

7. Exemple

Écrire la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ comme produit de la matrice d'une homothétie vectorielle et de la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature.

8. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle x | y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$.
En déduire que u est une similitude de rapport k, si et seulement si,
$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$.

9. Démontrer que, si u est une similitude de rapport k, alors, pour tout couple (x, y) de vecteurs de E, $\langle x | y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x) | u(y) \rangle = 0$.
On dit que l'endomorphisme u conserve l'orthogonalité.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme de E conservant l'orthogonalité.

Soit $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Démontrer que :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0$, puis que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

On note k la valeur commune prise par tous les $\|u(e_i)\|$.

Après avoir justifié que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|u(e_i)\| = k\|e_i\|$ démontrer que u est une similitude de rapport k.

10. Soit u une application de E dans E (non supposée linéaire) telle qu'il existe un réel $k > 0$ pour lequel : $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle$.
Démontrer que u est un endomorphisme de E, puis que u est une similitude de E.

Fin