2ème partie

3.1 (i)

$$|G(u_1,u_2)| = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix}$$

$$= (u_1|u_1)(u_2|u_2) - (u_1|u_2)^2 \geqslant 0$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

(ii) $|G(u_1,u_2)| = 0 \iff (u_1|u_2)^2 = (u_1|u_1)(u_2|u_2)$

$\iff (u_1,u_2)$ est lié

C'est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3.2 On a $G(u_1,\dots,u_p) = \left((u_i|u_j)\right)_{1\leq i,j\leq p}$

et que : $\left(\forall\, 1\leq i,j\leq p,\ (u_i|u_j) = (u_j|u_i)\right)$

D'où la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$ est symétrique

3.3.1

$$|G(w_1,\dots,w_p)| = \begin{vmatrix} (w_1|w_1) & \dots & (w_1|w_i) & \dots & (w_1|w_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i|w_1) & \dots & (w_i|w_i) & \dots & (w_i|w_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_p|w_1) & \dots & (w_p|w_i) & \dots & (w_p|w_p) \end{vmatrix}$$

or $(\forall k\neq i,\ w_k = u_k)$, alors :

$$|G(w_1,\dots,w_p)| = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|w_i) & \cdots & (v_1|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (w_i|v_1) & \cdots & (w_i|w_i) & \cdots & (w_i|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|w_i) & \cdots & (v_p|v_p) \end{vmatrix}$$

On a : $w_i = v_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j v_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} (w_i|v_1) = (v_i|v_1) + \sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_1) \\ \cdots \\ (w_i|v_p) = (v_i|v_p) + \sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_p) \end{cases}$$

La $i$ème ligne de $|G(w_1,\dots,w_p)|$ est alors :

$$\big((u_i|v_1)\ \dots\ (u_i|v_p)\big) + \Big(\sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_1)\ \cdots\ \sum_{j\neq i} \lambda_j (v_j|v_p)\Big)$$

Càd : $\big((u_i|v_1)\ \dots\ (u_i|v_p)\big) + \sum_{j\neq i} \lambda_j \underbrace{\big((v_j|v_1)\ \cdots\ (v_j|v_p)\big)}_{= L_j \text{, la } j^{\text{ème}} \text{ ligne}}$

Alors avec $L_i \leftarrow L_i - \sum_{j\neq i} \lambda_j L_j$, on aura :

$$|G(w_1,\dots,w_p)| = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|w_i) & \cdots & (v_1|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_i|v_1) & \cdots & (u_i|w_i) & \cdots & (u_i|v_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (v_p|v_1) & \cdots & (v_p|w_i) & \cdots & (v_p|v_p) \end{vmatrix}$$

On fait de même pour la $i$ème colonne :

On a : $w_i = u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_1 | w_i) = (u_1 | u_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_1 | u_j) \\ \quad \ldots \\ (u_p | w_i) = (u_p | u_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_p | u_j) \end{cases}$$

La ième colonne de $|G(w_1, \ldots, w_p)|$ est alors :

$$\begin{pmatrix} (u_1 | u_i) \\ \vdots \\ (u_p | u_i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_1 | u_j) \\ \vdots \\ \sum_{j \neq i} \lambda_j (u_p | u_j) \end{pmatrix}$$

Càd $\begin{pmatrix} (u_1 | u_i) \\ \vdots \\ (u_p | u_i) \end{pmatrix} + \sum_{j \neq i} \lambda_j \underbrace{\begin{pmatrix} (u_1 | u_j) \\ \vdots \\ (u_p | u_j) \end{pmatrix}}_{= C_j \text{ la } j\text{ème colonne}}$

Alors avec $C_i \leftarrow C_i - \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$, on aura :

$$|G(w_1, \ldots, w_p)| = \begin{vmatrix} (u_1 | u_1) & \ldots & (u_1 | u_i) & \ldots & (u_1 | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_i | u_1) & \ldots & (u_i | u_i) & \ldots & (u_i | u_p) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (u_p | u_1) & \ldots & (u_p | u_i) & \ldots & (u_p | u_p) \end{vmatrix}$$

$$= |G(u_1, \ldots, u_p)|$$

CQFD

3.3.2 Supp que $(v_1, \dots, v_p)$ est lié.

Alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j = 0 \\ \exists i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i \neq 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha_i u_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j u_j = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_i + \sum_{j \neq i} \frac{\alpha_j}{\alpha_i} u_j = 0$$

Notons pour tout $j \neq i$, $\lambda_j = \frac{\alpha_j}{\alpha_i}$.

On a alors $u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j = 0$

Posons $\begin{cases} w_k = v_k \ , \text{pour tout } k \neq i \\ w_i = v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j \end{cases}$

D'après 3.3.1 on a : $|G(w_1, \dots, w_p)| = |G(v_1, \dots, v_p)|$

Or $w_i = 0$ alors $|G(w_1, \dots, w_p)| = 0$, car $L_i = 0$

D'où $|G(v_1, \dots, v_p)| = 0$

CQFD

3.4.1 On a $\begin{cases} u_j = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} e_k \\ u_i = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} e_k \end{cases}$

et $(e_1, \dots, e_p)$ base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

Alors $(u_i | u_j) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,i} b_{k,j}$

3.4.2 Soit $(i,j) \in \{1, \dots, p\}^2$.

Il s'agit de montrer que $(u_i | u_j) = ({}^tB.B)_{ij}$

On a $$({}^tB\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tB)_{ik} (B_{kj})$$
$$= \sum_{k=1}^{p} B_{ki} B_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} b_{ki} b_{kj} \qquad \| \; B_{ij} = b_{ij}$$
$$= (u_i | u_j) \quad (\text{d'après } 3.4.1)$$

3.4.3 $$|G(u_1, \dots, u_p)| = \det({}^tB.B)$$
$$= \underbrace{\det({}^tB)}_{= \det(B)} \det(B)$$
$$= (\det(B))^2 \geqslant 0$$

Reste à justifier que $\det(B) \neq 0$.

On a $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pp} \end{pmatrix}$; avec $\begin{cases} u_j = \sum_{k=1}^{p} b_{kj} e_k \\ \forall j \in \{1, \dots, p\} \end{cases}$

Càd $B = \underset{(e_1,\dots,e_p)}{\mathrm{mat}}(v_1,\dots,v_p)$ qui est <u>inversible</u>

en tant que matrice d'une base dans une base
(ou matrice de passage d'une base à une base)

D'où $\det(B) \neq 0$

3.5.1 $x = \underbrace{\left(x - P_F(x)\right)}_{\in F^{\perp}} + P_F(x)$ et $\left(x - P_F(x)\right) \in F^{\perp}$

$$G(v_1,\dots,v_n,x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|x) \\ (x|v_1) & \dots & (x|v_n) & (x|x) \end{vmatrix}$$

Pour tout $1 \leq i \leq p$, on a :

$$\begin{cases} (v_i|x) = \underbrace{\left(v_i \mid \left(x - P_F(x)\right)\right)}_{=0} + \left(v_i \mid P_F(x)\right) = \left(v_i \mid P_F(x)\right) \\ (x|v_i) = \left(P_F(x) \mid v_i\right) \end{cases}$$

Et $(x|x) = \| P_F(x) + (x - P_F(x)) \|^2 = \| P_F(x) \|^2 + \| x - P_F(x) \|^2$

$$G(v_1,\dots,v_n,x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \dots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) + 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \dots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) + 0 \\ (P_F(x)|v_1) & \dots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) + \|x - P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$G(v_1,\dots,v_n,x) = \begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) + 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) + 0 \\ (P_F(x)|v_1) & \cdots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) + \|x-P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_n) & (v_1|P_F(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_n) & (v_n|P_F(x)) \\ (P_F(x)|v_1) & \cdots & (P_F(x)|v_n) & (P_F(x)|P_F(x)) \end{vmatrix}}_{=|G(v_1,\dots,v_n,P_F(x))|} +$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} (v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (v_n|v_1) & \cdots & (v_n|v_n) & 0 \\ (P_F(x)|v_1) & \cdots & (P_F(x)|v_n) & \|x-P_F(x)\|^2 \end{vmatrix}}_{=\|x-P_F(x)\|^2|G(v_1,\dots,v_n)|}$$

3.5.2

$P_F(x) \in \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_n) \Rightarrow (v_1,\dots,v_n,P_F(x))$ lié

$\Rightarrow |G(v_1,\dots,v_n,P_F(x))| = 0$

3.5.1 $\Rightarrow |G(v_1,\dots,v_n,x)| = \underbrace{\|x-P_F(x)\|^2}_{=(d(x,F))^2} |G(v_1,\dots,v_n)|$

D'où $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{|G(v_1,\dots,v_n,x)|}{|G(v_1,\dots,v_n)|}}$

3.6.1 $\det_{B_c}(v_1,\dots,v_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & 1 \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

où B_c la base canonique de $\mathbb{R}^n$

D'où $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.

3.6.2 $\begin{cases} \text{Si } i \leq j \,;\, (v_i|v_j) = i \\ \text{Si } i > j \,;\, (v_i|v_j) = j \end{cases}$

$\Longrightarrow \left(\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2,\ (v_i|v_j) = \min(i,j) = a_{ij} \right)$

D'où $A_n = \left((v_i|v_j)\right)_{1 \leq i,j \leq 1}$, qui est donc une matrice de Gram.

3.6.3

i) A_n est une matrice <u>symétrique</u> <u>réelle</u>

Donc elle est <u>orthogonalement diagonalisable</u>.

ii) <u>Soit $\lambda \in Sp(A_n)$, Mq que $\lambda > 0$</u>

Soit $X \in M_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_n X = \lambda X$.

3.4.2 $\Rightarrow$ (il existe une matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A_n = {}^tB \cdot B$)

$$A_n X = \lambda X \Rightarrow {}^tB\,B\,X = \lambda . X$$

$$\Rightarrow {}^tX . {}^tB\,B\,X = {}^tX . (\lambda X)$$

$$\Rightarrow {}^t(BX) . (BX) = \lambda\, ({}^tX . X)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|BX\|^2 = \lambda \|X\|^2 \\ \text{où } \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

Et on a $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$.

et $\|BX\|^2 > 0$ car $BX \neq 0$, puis que $X \neq 0$ et B inversible

D'où $\boxed{\lambda > 0}$

Fin partie 2

Partie 3

4.1 (cours)

4.2.1 $P_k = X^k$

$$(P_{n_i} \mid P_{n_j}) = \frac{1}{n_i + n_j + 1}$$

4.2.2

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \begin{vmatrix} (P_{n_1} \mid P_{n_1}) & \cdots & (P_{n_1} \mid P_{n_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ (P_{n_p} \mid P_{n_1}) & \cdots & (P_{n_p} \mid P_{n_p}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{(n_1+1)+n_1} & \cdots & \frac{1}{(n_1+1)+n_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(n_p+1)+n_1} & \cdots & \frac{1}{(n_p+1)+n_p} \end{vmatrix}$$

$= \Delta_p$; le déterminant de Cauchy d'ordre p associé à la famille $(n_k+1)_{1 \leq k \leq p}$ et $(n_k)_{1 \leq k \leq p}$

D'où d'après 2.4.3 on a :

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} \left((n_j+1)-(n_i+1)\right)(n_j - n_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)}$$

$$\boxed{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq p} (n_j - n_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq p} (n_i + 1 + n_j)}}$$

4.2.3 $(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$

Comme famille de polynômes non nuls échelonnée de degrés.

4.2.4 Soit $r \in \mathbb{N}$.

Mq que : $d(P_r, W_p) = \dfrac{1}{\sqrt{2r+1}} \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \dfrac{|n_k - r|}{n_k + r + 1}$

$(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})$ est une base de W_p.

$$(3.5.2) \Rightarrow d(P_r, W_p) = \sqrt{\frac{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}, P_r)|}{|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})|}}$$

$$(4.2.2) \Rightarrow |G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p})| = \frac{\prod_{1 \le i < j \le p} (n_j - n_i)^2}{\prod_{1 \le i,j \le p} (n_i + 1 + n_j)} \quad \text{(les } n_i \text{ distincts 2 à 2)}$$

$$|G(P_{n_1}, \dots, P_{n_p}, P_r)| = ?$$

Cas 1 : Si $r \in \{n_1, \dots, n_p\}$

$P_r \in W_p \Rightarrow d(P_r, W_p) = 0$

et $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{|n_k - r|}{n_k + r + 1} = 0$

Alors l'égalité voulue est vérifiée

Cas 2 : Si $r \notin \{n_1, \dots, n_p\}$

Alors les entiers $n_1, \dots, n_p, r$ sont distincts deux à deux.

D'après (4.2.2) on a :

$$|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p},P_r)| = \frac{\left[\prod_{1\leq i<j\leq p}(n_j-n_i)^2\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{p}(r-n_i)^2\right]}{\left[\prod_{1\leq i,j\leq p}(n_i+n_j+1)\right]\left[\prod_{i=1}^{p}(r+n_i+1)\right]^2(r+r+1)}$$

Schéma illustratif :

$$\begin{array}{cccc|c}
(n_1,n_1) & \cdots & & (n_1,n_p) & (n_1,r) \\
\vdots & & & \vdots & \vdots \\
(n_p,n_1) & \cdots & & (n_p,n_p) & (n_p,r) \\
\hline
(r,n_1) & \cdots & & (r,n_p) & (r,r)
\end{array}$$

Avec $|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})| = \dfrac{\prod_{1\leq i<j\leq p}(n_j-n_i)^2}{\prod_{1\leq i,j\leq p}(n_i+1+n_j)}$

On a :

$$d(P_r,W_p) = \sqrt{\frac{|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p},P_r)|}{|G(P_{n_1},\dots,P_{n_p})|}}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{p}|r-n_i|}{\left(\prod_{i=1}^{p}(r+n_i+1)\right)\cdot\sqrt{2r+1}}$$

4.3.1 Il s'agit de montrer que :

$$\exists!\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \psi(a_1,\dots,a_n)=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\psi(x_1,\dots,x_n)$$

D'autre part :

$$\psi(x_1,\dots,x_n)=\int_0^1(1-a_1t-\dots-a_nt^n)^2\,dt$$

$$=(1-a_1X-\dots-a_nX^n|1-a_1X-\dots-a_nX^n)$$

$$=\|1-a_1X-\dots-a_nX^n\|^2$$

$$=\|1-(a_1X+\dots+a_nX^n)\|^2$$

$$\boxed{\psi(x_1,\dots,x_n)=\left(d(1,a_1X+\dots+a_nX^n)\right)^2}$$

Alors il s'agit de montrer que :

$$\exists!\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ \left(d(1,a_1X+\dots+a_nX^n)\right)^2=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\left(d(1,x_1X+\dots+x_nX^n)\right)^2$$

<u>Càd</u> :

$$\exists!\,(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n,\ d(1,a_1X+\dots+a_nX^n)=\inf_{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n}d(1,x_1X+\dots+x_nX^n)$$

Notons $F=\{x_1X+\dots+x_nX^n/(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n\}$

Il s'agit de montrer que :

$$\exists!\,Q\in F,\ d(1,Q)=\inf_{P\in F}(d(1,P))=d(1,F)$$

Càd : $\left(\exists!\, Q \in F,\ d(1, Q) = d(1, F)\right)$

Ce qui est vrai car F est un sev de dimension finie (= n) de l'espace préhilbertien réel $(\mathbb{R}[X], (\cdot|\cdot))$

4.3.2 Soit $(a_1, \dots, a_n)$ l'unique point de $\mathbb{R}^n$ dans (4.3.1)

Càd $Q(X) = a_1 X + \dots + a_n X^n$ est l'unique élément de F vérifiant $d(1, Q) = d(1, F)$.

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \|1 - Q\|^2$$
$$= \left(d(1, F)\right)^2 \quad \begin{pmatrix}\text{on applique} \\ (4.2.4)\end{pmatrix}$$

On a $F = \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n) = \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_n)$

Alors :

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) = \left(d(P_0, F)\right)^2 \qquad \left\| \begin{array}{l} r = 0 \\ n_1 = 1 \\ \vdots \\ n_n = n \end{array} \right.$$

$$\underset{=\!=}{\overset{4.2.4}{=}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\times 0+1}} \prod_{k=1}^{n} \frac{|k - 0|}{(k + 0 + 1)}\right)^2$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}\right)^2 \quad (\text{Produit télescopique})$$

Cc : $\boxed{\varphi(a_1, \dots, a_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2}}$

Fin

Fin