Nombres complexes

Exercice 1 :

$\mathbb{U}$ désigne l'ensembles des nombres complexes de modules 1.
Montrer de deux manières différentes que :

1) $\forall z, z' \in \mathbb{U},\ \frac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$

2) $\forall z \in \mathbb{U}|\{1\},\ \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*|\{1\}$. Soit $p \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{U}_n$ désignera l'ensembles des racines nèmes de l'unité. Calculer :
1) $S_1 = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$, 2) $S_2 = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$, 3) $S_3 = \sum\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$, 4) $P = \prod\limits_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$,

Exercice 3 :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k cos(k\theta)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k sin(k\theta)$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n} cos(k\theta)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} sin(k\theta)$.

3) $\sum\limits_{k=0}^{n} kcos(k\theta)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} ksin(k\theta)$.

Exercice 4 :

Rappelons la notation $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Simplifier :

1) $j(j+1)$, $\frac{j}{j^2+1}$ et $\frac{j+1}{j-1}$

2) $\prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}$; où $n \succeq 2$.

Indice : Factoriser $k^3 - 1$ en introduisant j.

Exercice 5 :

Soient $n \succeq 2$ et ω une racine nème de l'unité. Calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k$

Exercice 6 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ 2) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$ 3) $z^n + 1 = 0$
4) $(z+1)^n = (z-1)^n$ 5) $(z+i)^n = (z-i)^n$ 6) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
7) $e^z = -2020$ 8) $e^z = \sqrt{3} + i$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier les expressions suivantes :

1) $\left(\frac{3\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+2i}\right)^{25}$, 2) $(1+i)^n + (1-i)^n$, 3) $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$,

4) $(1-j)^6$ 5) $\left(\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{2020}$

Exercice 8 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer les racines nèmes de i et $1+i$.

2) Résoudre l'équation (E) : $z^{2n} - z^n + 1 = 0$.

Exercice 9 :

Posons $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}}$. Calculer les complexes suivants :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \; et \; B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Indice : Calculer $A+B$ *et* AB.

Exercice 10 :

Exprimer $cos(3\theta)sin(6\theta)$ en fonction de $cos(\theta)$ et $sin(\theta)$.

Exercice 11 :

Résoudre l'équation suivante sachant qu'elle possède une solution imaginaire pure :

$$(i-1)z^3 - (5i-11)z^2 - (43+i)z + 9 + 37i = 0$$

Exercice 12 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$

2) Soit z une solution de (E). Posons $x = z + \frac{1}{z}$.
Montrer que x est solution d'une équation simple à préciser.

3) En déduire une expression algébrique de $cos(\frac{2\pi}{5})$.

Exercice 13 :

1) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ xyz & = & 1 \end{cases}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2cos(\theta)z + 1 = 0$.

   b) Montrer que toute solution de cette équation est aussi solution de l'équation suivante :

$$z^{2n} - 2cos(n\theta)z + 1 = 0$$

Exercice 14 :

Soient z et z' deux nombres complexes. Montrer que :

1) $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2 \times \left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

2) $|z+z'|^2 \leq \left(1+|z|^2\right) \times \left(1+|z'|^2\right)$.

Exercice 15 :

Soient n un élément de $\mathbb{N} - \{0,1\}$ et ω une racine n^{ime} de l'unité. Simplifier :

$S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_n^k \, \omega^k.$, $S_2 = \sum\limits_{0 \preceq k \preceq p \preceq n-1} C_p^k \omega^{k+p}$, $S_3 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$

Exercice 16 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

1) Pour tout complexe z de module différent de 1, on a

$$\left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \preceq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$$

2) Pour tout complexe z. On a

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \right| \preceq \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n$$

Exercice 17 :

Calculer en fonction de n la somme : $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \sin\left(\frac{k\,\pi}{3}\right)$.

Exercice 18 :

soit$(x, y, n, p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$.

1) Réduire la somme $\sum\limits_{k=p}^{n} \cos(x + k\,y)$.

2) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$1 + \cos(x) + \cos(2\,x) + \cdots + \cos(2020\,x) = 0.$$

Exercice 19 :

Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=1}^{2020} \cos^k(\theta)\ \cos(k\theta) = 0.$$

Exercice 20 :

1) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^5 x$, $\sin^6 x$, $\sin^3 x \cos^2 x$.
2) (a) Déterminer le polynôme P tel que $P(\cos x) = \cos 5x$.
   (b) Déduire la valeur de $\cos \dfrac{\pi}{10}$ puis $\cos \dfrac{\pi}{5}$.

Exercice 21 :

Trouver les nombres complexes z tels que les points d'affixes :

1) z, z^2 et z^3 soient alignés.
2) 1, z, z^2 et z^3 soient cocycliques.
3) z, z^2 et z^3 soient les sommets d'un triangle isocèle.

Exercice 22 :

Soient A, B et C trois points d'un plan complexe muni d'un repère orthonormal direct,d'affixes respectivement a, b et c.

1) Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct ssi $a + j\,b + j^2\,c = 0$.
2) Déduire que ABC est un triangle équilatéral indirect ssi $a + j\,c + j^2\,b = 0$.
3) Montrer que ABC est un triangle équilatéral ssi $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.