CCP 2016 - Filière MP
Corrigé de l'épreuve Mathématiques I

Nicolas Basbois & Damien Broizat
Institut Stanislas, Cannes - Lycée Jules Ferry

EXERCICE I

I.1. Supposons que l'équation différentielle (E) possède une solution développable en série entière sur $]-r;r[$ (avec $r>0$), notée $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En dérivant deux fois cette série entière terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence, on obtient pour tout $x \in]-r;r[$:

$$(x^2-x)y'(x) = (x^2-x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$

ainsi que

$$x^2 y''(x) = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n.$$

En sommant ces développements en série entière, il vient, pour tout $x \in]-r;r[$:

$$\begin{aligned} x^2y''(x) + (x^2-x)y'(x) + 2y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n^2-2n+2)a_n + (n-1)a_{n-1}\right) x^n + 2a_0. \end{aligned}$$

Puisque y est solution de (E), on obtient par unicité du développement en série entière les relations $\begin{cases} 2a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ (n^2-2n+2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0 \end{cases}$.

Puisque $n^2-2n+2 = 1+(n-1)^2 \neq 0$, ces relations se réécrivent $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{1-n}{1+(n-1)^2} a_{n-1} \end{cases}$,
ce qui entraîne la nullité de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une récurrence immédiate.
En conclusion, on a montré qu'une telle solution est nécessairement la fonction nulle.
Il n'existe donc pas de solution non nulle de (E) qui soit développable en série entière au voisinage de 0.

Fin extrait