Def

$f \in O(E) \iff \forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$ ✓

Prop

$\iff \forall x, y \in E, \langle f(x) | f(y) \rangle = \langle x | y \rangle$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle$

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle$

$(\mathcal{L}(E), \circ)$ ~~groupe~~ ? $\neq$ $\underbrace{(GL(E), \circ)}_{\text{groupe}}$

Non

OK

Année : 2024

Filière : MP

Concours : Mines-Télécom

Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille liée génératrice de vecteurs unitaires de E, deux à deux distincts, pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = \alpha$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ et $\alpha = -\dfrac{1}{n-1}$.

2. Montrer que $\dim E = n - 1$.

hilbertiens

Soit B une bon de E.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\boxed{\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(E)}$$

Démo

$f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow f(B)$ est une bon de E

$$\Leftrightarrow \underbrace{\underset{B}{\mathrm{mat}}(f(B))}_{\parallel} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \square$$

Rappel : $\underset{B}{\mathrm{mat}}(f(B)) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(f)$

Justificat° : $B = (e_1, \dots, e_n)$

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f) \overset{\text{déf}}{=} \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underset{B}{\mathrm{mat}}(f(B)) = \underset{B}{\mathrm{mat}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

$$\overset{\text{déf}}{=} \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$\dim E = n.$

$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ens des formes linéaires sur E.

$\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ se note E^*

l'espace **dual** de E

$\dim(E^*) = \dim E \; (= n)$

car $\dim \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \overbrace{\dim \mathbb{K}}^{=1}$

$\dim\left(\mathcal{L}(E, F)\right) = \dim E \times \dim F$