ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIÈRE MP),
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI).

CONCOURS 2015

SECONDE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière MP

MATHÉMATIQUES II - MP.

Extrait

J'ai ajouté ceci pour rendre la question faisable pour les 1ères années.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α*-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

On admet que :

$\forall t \in \mathbb{R}, \ \mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$

$\forall t \in \mathbb{R}, \ \exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}$.

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

Fin Extrait

CORRECTION

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α-*sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}\left(\exp(tX)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation : $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(t) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} \mathrm{ch}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \\ e^{\frac{t^2}{2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n \cdot (n!)} \end{cases}$$

Alors il suffit de montrer que :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{(2n)!} \leqslant \frac{1}{2^n \cdot n!}\right)$$

C à d $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ (2n)! \geqslant 2^n \cdot n!\right)$

Soit $n \geqslant 1$, on a :

$$(2n)! = \underbrace{(2n)}_{\geqslant 2} \cdots \underbrace{(n+1)}_{\geqslant 2} \cdot n! \geqslant 2^{(2n)-(n+1)+1} \times n! = 2^n \cdot n!$$

Et cette inégalité est vérifiée pour $n=0$.

D'où $\left(\forall n \in \mathbb{N},\ (2n)! \geqslant 2^n \cdot n!\right)$

$\square$

9) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1,1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

On a $\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}.t + \frac{1-x}{2}.(-t)\right)$

Or $\begin{cases} \exp \text{ est convexe sur } \mathbb{R}. \\ \frac{1+x}{2} \text{ et } \frac{1-x}{2} \text{ positifs de somme égale à } 1. \end{cases}$

Alors $\exp\left(\frac{1+x}{2}.t + \frac{1-x}{2}.(-t)\right) \leqslant \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$

D'où l'inégalité voulue.

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

a) Supposons que $|X| \leqslant 1$ et $E(X) = 0$.

Montrons que X est 1-sous-gaussienne :

C.à.d : $\left(\forall t \in \mathbb{R},\ E(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\right)$

. Soit $\alpha > 0$. On dit que la variable aléatoire X est α*-sous-gaussienne* si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{E}(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

Définition

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $X \in [-1,1]$, alors d'après (9°) :

$$\exp(tX) \leqslant \frac{1+X}{2}.\exp(t) + \frac{1-X}{2}.\exp(-t)$$

Et vu la croissance et la linéarité de l'espérance, on a :

$$E(\exp(tX)) \leqslant \exp(t)\underbrace{E\left(\frac{1+X}{2}\right)}_{=\frac{1}{2},\ \text{car } E(X)=0} + \exp(-t)\underbrace{E\left(\frac{1-X}{2}\right)}_{=\frac{1}{2}}$$

D'où $E(\exp(tX)) \leqslant ch(t)$

$\leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$ (d'après 8°))

b) En déduire que, si X est une variable aléatoire bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

Supposons que $|X| \leqslant \alpha$ et $E(X) = 0$.

M que X est α-sous-gaussienne.

Soit alors $t \in \mathbb{R}$. M que $E(\exp(tX)) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$:

On a $\begin{cases} \left|\frac{X}{\alpha}\right| \leqslant 1 \\ E\left(\frac{X}{\alpha}\right) = 0 \end{cases}$ alors d'après a) on a :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ E\left(\exp\left(s \cdot \frac{X}{\alpha}\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{s^2}{2}\right) \quad (\Omega)$$

$$\text{Alors } E(\exp(tX)) = E\left(\exp\left(t\alpha \cdot \frac{X}{\alpha}\right)\right) \overset{(\Omega)}{\leqslant} \exp\left(\frac{(t\alpha)^2}{2}\right)$$

$\square$

11) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} (\mu_i)^2 = 1$.

Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est α-sous-gaussienne.

Soit $t \in \mathbb{R}$. M que :

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

On a :

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) = E\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{n} t \mu_i X_i\right)\right)$$

$$= E\left(\prod_{i=1}^{n} \exp(t\mu_i X_i)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(\exp(t\mu_i X_i)\right)$$

Car les $\left(\exp(t\mu_i X_i)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes vu que les $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont indépendantes.

Or : $\left(\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ E\left(\exp(t\mu_i X_i)\right) \leqslant \exp\left(\frac{t^2 \mu_i^2 \alpha^2}{2}\right)\right)$

Car X_i est α-sous-gaussienne.

Alors :

$$E\left(\exp\left(t \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right)\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{t^2 \mu_i^2 \alpha^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^2 \mu_i^2 \alpha^2}{2}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{t^2 \alpha^2}{2} \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2}^{=1}\right) = \exp\left(\frac{t^2 \alpha^2}{2}\right)$$

$\square$

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

a) Soient X var α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$:

Soit $t > 0$. M que : $P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$

On sent l'inégalité de Markov :

Rappel : Si $\begin{cases} X \geqslant 0 \\ a > 0 \end{cases}$ Alors $P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$

On a :

$$P(X \geqslant \lambda) = P(tX \geqslant t\lambda) = P(\underbrace{\exp(tX)}_{\text{positive}} \geqslant \exp(t\lambda))$$

$$\leqslant \frac{E(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)} \quad \text{(Markov)}$$

$$\leqslant \frac{\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)}{\exp(t\lambda)} \quad \text{(car } X\ \alpha\text{-sous-gaussienne)}$$

$$= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

$\square$

b) En déduire que :

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

On a $(|X| \geqslant \lambda) = (X \geqslant \lambda) \sqcup (-X \geqslant \lambda)$

$\Rightarrow P(|X| \geqslant \lambda) = P(X \geqslant \lambda) + P(-X \geqslant \lambda)$

On a $P(X \geqslant \lambda) \leqslant \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$ (d'après a))

D'autre part, $(-X)$ est aussi α-sous-gaussienne.

Car :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ E(\exp(t.(-X))) = E(\exp((-t).X))$$
$$\leq \exp\left(\frac{\alpha^2.(-t)^2}{2}\right) \quad (\text{car } X\text{-}\alpha\text{-s-gauss})$$
$$= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right)$$

D'où d'après a), on a :

$$\mathbb{P}(-X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

Ainsi :

$$\forall t > 0,\quad P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

et nous voulons montrer que : $P(|X| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$

Alors pour finir, il suffit de vérifier qu'il existe $t > 0$ tel que $\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$

Et on a :

$$\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = \frac{-\lambda^2}{2\alpha^2} \iff \alpha^2 t^2 - 2t\lambda + \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = 0$$
$$\iff (\alpha t)^2 - 2.\alpha t.\frac{\lambda}{\alpha} + \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = 0$$
$$\iff \left(\alpha t - \frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = 0$$
$$\iff t = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

Un tel $t > 0$ existe alors, et c'est fini $\square$