

Centrale MP 2024 - Epreuve 1

I. Inégalité de Knopp

Inégalité intégrale de Jensen

1. f étant continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Il y a cependant un problème pour $\varphi \circ f$ qui n'a pas de raison d'être continue par morceaux sur $]a, b[$, l'intégrale du membre de droite n'ayant pas de sens dans le cadre du problème.

Notons h la fonction 1-périodique telle que $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = x$. Prenons $[a, b] = [0, 2]$ et f la restriction de h à $[a, b]$. On a $f([a, b]) =]0, 1[= J$ qui est un intervalle. Prenons $\varphi(x) = 1/x$ pour $x \in J$ qui est continue sur J et convexe. $\varphi(f(x)) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 1^+$. $\varphi \circ f$ n'est donc pas continue par morceaux sur $[a, b]$. On ne peut utiliser le résultat sur les sommes de Riemann avec cette fonction.

Dans cette question, on va **SUPPOSER en plus que $\varphi \circ f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$** . On a alors

$$\int_a^b \varphi \circ f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

En interprétant ci-dessous l'argument de φ comme un isobarycentre (poids tous égaux à $1/n$, positifs de somme 1), la convexité de φ donne

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

L'argument de φ à gauche est de limite $\frac{1}{b-a} \int_a^b f$ et le terme de droite de limite $\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f$. Par continuité de φ , un passage à la limite donne donc

$$\boxed{\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt}$$

Une autre inégalité intégrale

2. Comme f est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ , il existe $r > 0$ tel que f est continue sur $]0, r[$ et f admet une limite finie en 0.

On en déduit que $u : t \mapsto tf(t)$ est continue sur $[0, r]$ (elle l'est sur $]0, r[$ et sa limite en 0 vaut $0 = 0 \times f(0)$).

Par théorème fondamental, $U : x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ est une primitive de u sur $[0, r]$. Or, $g(x) = \frac{U(x) - U(0)}{x}$ est un taux d'accroissement et ainsi $g(x) \rightarrow U'(0) = u(0) = 0$ quand $x \rightarrow 0$. On a donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0}$$

3. Comme indiqué par l'énoncé, on remarque que

$$g(x) = \int_0^{+\infty} h(x, t) dt \text{ avec } h(x, t) = \frac{1}{x} tf(t) \mathbf{1}_{[0, x]}(t)$$

On veut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

- $\forall x > 0$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall t \geq 0$, $h(x, t) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ (puisque pour $x > t$, $h(x, t) = \frac{tf(t)}{x}$) et $t \mapsto 0$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall x > 0$, $\forall t \in [0, x]$, $|h(x, t)| \leq |f(t)|$ (on majore t par x) et la majoration reste vraie si $t > x$ (car alors $h(x, t) = 0$). La fonction dominatrice $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique et donne :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}$$

4. On note encore $U : x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ en sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, h(x) = \frac{U(x)}{x^2}$$

$t \mapsto tf(t)$ étant continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ , U est continue sur \mathbb{R}^+ et $h \in C^0(\mathbb{R}^{+*})$. Les problèmes pour l'intégration sont ceux aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

On s'intéresse donc pour $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ à $\int_a^b h$ dont on veut montrer qu'elle admet une limite finie quand $a \rightarrow 0$ et $b \rightarrow +\infty$.

On se donne donc $[a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. Il existe une subdivision $c_0 = a < c_1 < \dots < c_n = b$ telle que f est continue sur $]c_i, c_{i+1}[$ et admet une limite finie en c_i et c_{i+1} à droite et gauche (pas forcément la même).

U est alors de classe C^1 sur $]c_i, c_{i+1}[$ et $\frac{U(x)}{x}$ admet une limite finie en c_i et c_{i+1} puisque l'on a continuité de U comme intégrale partielle d'une fonction continue par morceaux. On peut intégrer par parties et on obtient

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} h(t) dt = \frac{U(c_i)}{c_i} - \frac{U(c_{i+1})}{c_{i+1}} + \int_{c_i}^{c_{i+1}} \frac{U'(x)}{x} dx$$

Sur $]c_i, c_{i+1}[$ (comme en question 2), $U'(x) = xf(x)$ et ainsi

$$\int_{c_i}^{c_{i+1}} h(t) dt = \frac{U(c_i)}{c_i} - \frac{U(c_{i+1})}{c_{i+1}} + \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(x) dx$$

En sommant ces relations, les termes se simplifient et donnent

$$\int_a^b h = \frac{U(a)}{a} - \frac{U(b)}{b} + \int_a^b f$$

$\frac{U(a)}{a} = g(a)$ est de limite nulle en 0 et de même $\frac{U(b)}{b} = g(b)$ en $+\infty$. On a donc existence de limites finies comme escompté et $\int_0^\infty h$ existe et de plus

$$\boxed{\int_0^\infty f = \int_0^\infty h}$$

Démonstration de l'inégalité de Knopp

5. On retrouve le même problème qu'en question 1. Il est tout à fait possible que f tende vers 0 en un point $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\ln \circ f$ est alors de limite infinie en ce point.

On fait l'hypothèse supplémentaire que $\ln \circ f$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ .

Pout tout $t > 0$, on a $\ln(f(t)) = \ln(tf(t)) - \ln(t)$ et comme \ln est intégrable au voisinage de 0 ainsi que $\ln \circ f$ (qui est elle continue par morceaux sur \mathbb{R}^+), on peut écrire que (les trois intégrales existent)

$$\int_0^x \ln(f(t)) dt = \int_0^x \ln(tf(t)) dt - \int_0^x \ln(t) dt = \int_0^x \ln(tf(t)) dt - x \ln(x) + x$$

Pour $x > 0$, on divise par x puis on passe à l'exponentielle :

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln \circ f\right) = \frac{e}{x} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(tf(t)) dt\right)$$

Comme \exp est continue et convexe sur \mathbb{R} et $t \mapsto \ln(tf(t))$ sur $[y, x]$ pour $0 < y < x$, la question 1 donne

$$\exp\left(\frac{1}{x-y} \int_y^x \ln(tf(t)) dt\right) \leq \frac{1}{x-y} \int_y^x tf(t) dt$$

Comme on sait que les différentes intégrales existent, on peut faire tendre y vers 0 dans cette inégalité. Puis multiplier par $e/x \geq 0$ et conclure que

$$\boxed{\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) \leq \frac{e}{x^2} \int_0^x tf(t) dt}$$

6. Posons $V : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln \circ f\right)$. Comme $\ln \circ f$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ (hypothèse que nous avons ajoutée), $x \mapsto \int_0^x \ln \circ f$ est continue sur \mathbb{R}^+ . Ainsi, $x \mapsto \exp(V(x)/x)$ est continue sur \mathbb{R}^{+*} . Par ailleurs, la question 5 donne

$$\forall x > 0, 0 \leq V(x) \leq \frac{e}{x^2} \int_0^x tf(t)$$

et la question 4 donne l'intégrabilité du majorant sur \mathbb{R}^{+*} . Ainsi

$$\boxed{x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*}$$

De plus, on a (avec les notations de la sous-section précédente)

$$\int_0^\infty V(x) dx \leq \int_0^\infty eh(x) dx = e \int_0^\infty f$$

On a donc montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) dx \leq e \int_0^{+\infty} f(x) dx}$$

Application à l'inégalité de Carleman

7. Pour $k \geq 2$, v_k est de classe C^1 sur $[k-1, k]$ et

$$v'_k(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\sum_{i=1}^k \ln(a_i) - k \ln(a_k) \right)$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\ln(a_i) \geq \ln(a_k)$, la somme ci-dessus est minorée par $k \ln(a_k)$ et $v'_k(x) \leq 0$. v_k décroît sur $[k-1, k]$ et est minimale en k . Ceci reste vrai si $k = 1$ (v_1 étant constante).

$$\boxed{\forall x \in [k-1, k], v_k(x) \leq v_k(k)}$$

8. Soit $k \geq 2$. La relation de Chasles donne, pour $x \in [k-1, k]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \int_{i-1}^i \ln(f(t)) dt + \frac{1}{x} \int_{k-1}^x \ln(f(t)) dt \\ &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \frac{x-k+1}{x} \ln(f(a_k)) \\ &= v_k(x) \\ &\geq v_k(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i) \end{aligned}$$

Ceci reste vrai si $k = 1$. On compose par l'exponentielle puis on intègre sur $[k-1, k]$ (opérations croissantes) pour obtenir

$$\boxed{\int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) dx \geq \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i)\right)}$$

9. On a ainsi

$$\left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq \int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) dx$$

Comme toutes les quantités sont positives, on peut sommer (dans $[0, +\infty]$) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t)) dt\right) dx$$

f étant strictement positive et continue par morceaux sur \mathbb{R}^+ , l'inégalité de Knopp donne finalement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^k a_i\right)^{\frac{1}{k}} \leq e \int_0^{\infty} f = e \sum_{k=1}^{\infty} a_k}$$

Si $\sum(a_k)$ converge, les quantités sont finies et la série (positive) du membre de droite converge aussi.

10. $(a_k)_{k \geq 1}$ étant bornée, elle admet un maximum M_1 et $\{k \in \mathbb{N}^*, a_k = M_1\}$ admet un minimum i_1 .

On trouve de même $i_2 \neq i_1$ tel que $a_{i_2} = \max\{a_k, k \notin \{i_1\}\}$ (et on peut choisir i_2 minimal parmi les indices convenables si on veut une définition univoque).

On construit ainsi par récurrence une suite injective (i_k) telle que (a_{i_k}) est décroissante. En posant $b_k = a_{i_k}$, on peut appliquer l'inégalité de Carleman à (b_k) pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^k b_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Par injectivité de $k \mapsto i_k$ (et positivité des a_i),

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

et par construction des i_k (et positivité des termes)

$$\prod_{i=1}^k a_i \leq \prod_{i=1}^k b_i$$

L'élévation à la puissance $1/k$ étant croissante sur \mathbb{R}^{+*} , on en déduit l'inégalité de Carleman pour (a_k) .

Le résultat est vrai de façon générale sans la décroissance

II. Inégalité de Carleman

Inégalité arithmético-géométrique

11. Les coordonnées du gradient sont les dérivées partielles et on obtient ainsi, en notant $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$\nabla f(x) = f(x) \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right) \text{ et } \nabla g(x) = (1, \dots, 1)$$

12. $g_s^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue. $X_s = \overline{U_n} \cap g_s^{-1}(\{0\})$ est ainsi fermé comme intersection de fermés. Si $x \in X_s$, alors $x_1 + \dots + x_n = s$ et les x_i étant positifs, $x_i \in [0, s]$ pour tout i . X_s est donc borné. Comme \mathbb{R}^n est de dimension finie, le fermé borné X_s est un compact et l'application continue f admet un maximum sur X_s . Si $x \in X_s \setminus U_n$ alors l'un des x_i est nul et $f(x) = 0$. Or, $\frac{s}{n}(1, \dots, 1)$ est un élément de X_s où f prend une valeur > 0 et le maximum précédent est donc > 0 et pas sur le bord de X_s .

f admet un maximum > 0 sur X_s atteint en $a \in X_s \cap U_n$

13. On utilise le théorème d'optimisation sous contrainte. U_n est un ouvert sur lequel f et g sont de classe C^1 . f admet un maximum en $a \in \{x \in U_n, g_s(x) = 0\}$ et comme $\nabla g(a) \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. Avec les expressions obtenues pour les gradients, les $\frac{f(a)}{a_i}$ sont tous égaux à λ . Et comme $f(a)$ et les a_i sont > 0 , il en est de même pour λ .

$$\boxed{\exists \lambda > 0, \forall k, a_k = \frac{f(a)}{\lambda}}$$

14. Comme $a \in X_s$, $a_1 + \dots + a_n = s$ et donc $n \frac{f(a)}{\lambda} = s$. Pour tout $x \in U_n \cap X_s$, on a

$$f(x) \leq f(a) = \prod_{i=1}^n a_i = \left(\frac{f(a)}{\lambda} \right)^n = \left(\frac{s}{n} \right)^n$$

En passant à la puissance $1/n$ (opération croissante) et puisque $s = a_1 + \dots + a_n$, on obtient

$$\boxed{\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$$

On se donne $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$. Si l'un des x_i est nul, l'inégalité précédente est vraie. Sinon, en posant $s = x_1 + \dots + x_n$, on a $s > 0$ et on peut appliquer ce qui précède. L'inégalité ci-dessus est ainsi vraie pour tous x_1, \dots, x_n positifs.

Démonstration de l'inégalité de Carleman

15. On a

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_k}(x) = \sum_{i=k}^n \frac{1}{i} \frac{(x_1 \dots x_i)^{1/i}}{x_k}$$

et ainsi

$$\boxed{\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \left(\gamma_1(x) + \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n(x)}{n} \right) \\ \frac{1}{x_2} \left(\frac{\gamma_2(x)}{2} + \dots + \frac{\gamma_n(x)}{n} \right) \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \frac{\gamma_n(x)}{n} \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma_k(x) = (x_1 \dots x_k)^{1/k}}$$

On a aussi $\boxed{\nabla h_n(x) = (1, \dots, 1)}$ (en écrivant indifféremment les éléments de \mathbb{R}^n en ligne ou colonne).

16. Comme en question 12, $\overline{U_n} \cap H_n$ est fermé et borné (si x est dans l'ensemble, $x_i \in [0, 1]$) et F_n , qui est continue, admet un maximum sur cet ensemble compact. L'énoncé admet que le maximum n'est pas atteint au bord de l'ensemble.

$$\boxed{F_n \text{ admet un maximum } M_n > 0 \text{ sur } \overline{U_n} \cap H_n \text{ en } a \in U_n \cap H}$$

17. On utilise le théorème d'optimisation sous contrainte. U_n est un ouvert sur lequel F_n et h_n sont de classe C^1 . F_n admet un maximum en $a \in \{x \in U_n, h_n(x) = 0\}$ et comme $\nabla h_n(a) \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla F_n(a) = \lambda \nabla h_n(a)$.

Avec l'expression des gradients et les notations de l'énoncé,

$$\forall k, \frac{1}{a_k} \sum_{i=k}^n \frac{\gamma_i}{i} = \lambda$$

Comme $a \in H_n$, la somme des a_i vaut 1. Enfin, les a_k et γ_k sont > 0 et λ est aussi > 0 .

$$\boxed{\exists \lambda > 0, \begin{cases} \gamma_1 + \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_1 \\ \frac{\gamma_2}{2} + \dots + \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_2 \\ \vdots \\ \frac{\gamma_n}{n} = \lambda a_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \end{cases}}$$

18. En sommant les n premières équations, on trouve $\lambda = \gamma_1 + \dots + \gamma_n = F_n(a) = M_n$.

Pour $k \leq n-1$, on soustrait l'équation k et l'équation $k+1$: $\frac{\gamma_k}{k} = \lambda(a_k - a_{k+1})$ et on a ainsi

$$\gamma_k = \lambda k a_k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$$

et bien sûr $\gamma_n = n \lambda a_n$. Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \gamma_k = \lambda \omega_k a_k \text{ avec } \begin{cases} \omega_k = k \left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) \text{ si } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ \omega_n = n \end{cases}}$$

19. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{-(k+1)} = \exp\left(- (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right)$$

Par concavité, $\forall x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$. Ainsi $\ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) \leq \frac{1}{k+1}$. On change le sens de l'inégalité en multipliant par $-(k+1)$ et par croissance de l'exponentielle, on conclut que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}}$$

20. Avec l'hypothèse de l'absurde,

$$\omega_1 = \frac{\gamma_1}{\lambda a_1} = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e}$$

On montre maintenant par récurrence que

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \omega_k \leq \frac{k}{k+1}}$$

- Initialisation : $\omega_1 \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$ ce qui prouve le résultat au rang 1.

- Hérédité : soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que le résultat soit vrai au rang k . Pour tout i , $\omega_i^i = \frac{a_1 \dots a_i}{\lambda^i a_i^i}$ et donc

$$\frac{\omega_{k+1}^{k+1}}{\omega_k^k} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)^k = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k}$$

L'hypothèse de récurrence donne $1 - \frac{\omega_k}{k} \geq 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$ et ainsi

$$\left(1 - \frac{\omega_k}{k}\right)^{-k} \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k}$$

Comme $\omega_k^k \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$, on a donc

$$\omega_{k+1}^{k+1} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{e} \leq \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1}$$

et on en déduit le résultat au rang $k+1$.

21. En particulier (pour $k = n$), $n \leq \frac{n}{n+1}$ amène une contradiction. On a montré que $\lambda \leq e$.
 Pour tout $x \in U_n \cap H_n$, on a ainsi $F(x) \leq M_n = \lambda \leq e$ c'est à dire

$$\forall x \in U_n \cap H_n, \sum_{k=1}^n (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leq e$$

22. Soient $x_1, \dots, x_n > 0$. On note $s = x_1 + \dots + x_n > 0$ et $y_i = \frac{x_i}{s}$.
 On a $y = (y_1, \dots, y_n) \in \overline{U_n} \cap H_n$ et donc $\sum_{k=1}^n (y_1 y_2 \cdots y_k)^{1/k} \leq e$ (le résultat de la question précédente est valable sur $\overline{U_n} \cap H_n$ d'après le résultat admis après la question 16). En revenant aux x_i , on a donc

$$\sum_{k=1}^n (x_1 x_2 \cdots x_k)^{1/k} \leq e \sum_{i=1}^n x_i$$

Si (a_k) est une suite de réels > 0 , on a ainsi

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{i=1}^n a_i$$

Comme toutes les quantités sont positives, on peut passer à la limite dans $[0, +\infty]$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

En particulier la convergence de $\sum (a_k)$ donne celle de la série de terme général $(a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$.

III. Inégalité de Carleman-Yang

Un développement en série entière

23. On a $\varphi(t) = \exp\left(\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t)\right)$ et

$$\left(1 - \frac{1}{t}\right) \ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{t} \times (-t) = 1$$

Par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = e$$

On pose désormais $\varphi(0) = e$ en identifiant φ et son prolongement.

24. On montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq 1$$

- $|b_0| = 1$ et le résultat est vrai au rang 0.
- Soit $n \geq 1$. On suppose le résultat vrai jusqu'au rang $n-1$ (récurrence généralisée). On a alors

$$|b_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{|b_{n-k}|}{k+1} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1$$

ce qui prouve le résultat au rang n .

La suite (b_n) étant bornée, le lemme d'Abel donne que

$$\sum (b_n t^n) \text{ est de rayon de convergence } \geq 1$$

25. Soit $t \in]-1, 1[\setminus \{0\}$. φ est dérivable en t et

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \ln(1-t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k} = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-2}}{k} = \psi(t)$$

ψ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$ comme fonction DSE de rayon 1 et est en particulier continue en 0. On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \varphi(0)\psi(0)$$

Par théorème de limite de la dérivée, φ est dérivable en 0 à dérivée continue et $\varphi'(0) = \varphi(0)\psi(0)$. Ainsi

$$\varphi \in C^1(] -1, 1[) \text{ et } \forall t \in] -1, 1[, \varphi'(t) = \varphi(t)\psi(t)$$

Comme $\psi \in C^\infty$, on en déduit par récurrence que $\varphi \in C^\infty(] -1, 1[)$. Soit $n \geq 1$. En dérivant $n - 1$ fois la relation précédente (avec la formule de Leibniz), on obtient

$$\varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \psi^{(k)}(t) \varphi^{(n-1-k)}(t)$$

Le DSE de ψ est forcément son développement de Taylor et ainsi $\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} = -\frac{1}{k+2}$. La relation précédente en 0 donne donc

$$\varphi^{(n)}(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{k+2} \binom{n-1}{k} \varphi^{(n-k-1)}(0)$$

26. Soit $t \in]-1, 1[$. Posons (licite avec la question 24)

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k$$

On peut dériver terme à terme une série entière (sur l'intervalle ouvert de convergence) et ainsi

$$g'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) b_{k+1} t^k$$

Par théorème sur le produit de séries entières,

$$-g(t)\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k}}{k+2} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{b_{n+1-k}}{k+1} = -(n+1)b_{n+1}$$

On a donc $g(t)\psi(t) = g'(t)$. Comme $g(0) = b_0 = -1$, $-e.g$ est solution du même problème de Cauchy que φ et ainsi $\varphi = -e.g$ (l'équation différentielle est linéaire d'ordre 1, normalisée et à coefficients continus : le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique). Ainsi

$$\forall t \in]-1, 1[, \varphi(t) = e \left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} b_k t^k \right)$$

Démonstration de l'inégalité de Carleman-Yang

27. Pour tout choix des $c_i > 0$, on a

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{k=1}^n c_k \right)^{-\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^n a_k c_k \right)^{\frac{1}{n}}$$

On utilise l'inégalité arithmético-géométrique avec le second terme (puis on multiplie par le premier qui est > 0) et on obtient (on change le premier indice du membre droite qui est muet)

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k a_k$$

Toutes les quantités étant positives, on peut les sommer (travail dans $[0, +\infty)$) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} c_k a_k \right)$$

Les termes étant tous positifs, on peut intervertir l'ordre des sommes (théorème de Fubini), ce qui donne

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \left(\left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} \frac{1}{n} c_k a_k \right)}$$

28. On pose alors $c_i = \frac{(i+1)^i}{i^{i-1}}$ et un télescopage multiplicatif apparaît lors du produit :

$$\left(\prod_{i=1}^n c_i \right)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$$

La question précédente donne ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k a_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, les termes se télescopent :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k a_k}{k+1}$$

et avec l'expression de c_k :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{1-k} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} \varphi \left(\frac{1}{k+1} \right) a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi \left(\frac{1}{k+1} \right) a_k$$

En remplaçant par l'expression de φ obtenue en question 26, on conclut que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq e \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{(k+1)^i} \right) a_k}$$

29. On prouve par récurrence que $b_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
 Le résultat est vrai aux rangs 1 et 2 car $b_1 = \frac{1}{2}$ et $b_2 = \frac{1}{24}$.
 Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n - 1 \geq 2$. On écrit que

$$b_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{n-k+1} \right)$$

Dans la somme on isole le terme pour $k = n - 1$ qui vaut

$$\frac{b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_k}{n-k} \right)$$

On peut alors regrouper ensemble des termes :

$$\begin{aligned} nb_n &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n(n-1)} \right) - \sum_{k=1}^{n-2} b_k \left(\frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{2(n-1)(n-k)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n(n-1)} \right) - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_k}{n-k} \left(\frac{n-k}{n-k+1} - \frac{1}{2(n-1)} \right) \end{aligned}$$

Or, $\frac{n-k}{n-k+1} = 1 - \frac{1}{n-k+1} \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ et en multipliant par b_k (pas de changement de sens par récurrence) puis en multipliant par -1 , on obtient

$$\begin{aligned} nb_n &\geq \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n(n-1)} \right) - \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n-1)} \right) \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_k}{n-k} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n-1)} \right) \left(\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{b_k}{n-k} \right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n-1)} \right) (n-1)b_{n-1} \geq 0 \end{aligned}$$

car $\frac{n}{n+1} - \frac{1}{2(n-1)} = \frac{2n^2 - 3n - 1}{2(n+1)(n-1)} \geq 0$ et $b_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence. Le résultat est vrai au rang n .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n \geq 0}$$

On ainsi

$$1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(n+1)^k} \leq 1$$

et c'est même une inégalité stricte : on a amélioré l'inégalité de Carleman.