Q) Montrer que :

1) $\forall \alpha > 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,dt$ CV

2) $\forall \alpha < 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,dt$ DIV

intégrales de <u>Bertrand</u>

$\boxed{\text{Hors programme}}$

La technique est classique ; <u>à retenir</u>

Q) Montrer que :

1) $\forall \alpha > 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ CV

2) $\forall \alpha < 1$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ DIV

Scanned with CamScanner

9)

Nature de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln t}{t\sqrt{t}}\,dt$?

Notons $\int_e^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} \, dt$

soit $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} \frac{\ln t}{t^{3/2}} = \lim \frac{\ln t}{t^{3/2-\alpha}} = 0 \quad \left(\begin{array}{c} \frac{3}{2} - \alpha > 0 \\ \text{et par croissance comparée} \end{array} \right)$$

donc $\frac{\ln t}{t^{3/2}} = o\left(\frac{1}{t^{\alpha}}\right)$

ainsi $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} \, dt$ CV (car intégrale de Riemann $\alpha > 1$)

donc $\int_e^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}} \, dt$ CV.

Q)

Nature de $\displaystyle\int_{e}^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt[3]{t}}\,dt$?

Rép

Nature de $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt[3]{t}}\,dt$

Soit $\frac{1}{3} < \alpha < 1$

$\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{1/3}} \times t^{\alpha} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln(t)}{t^{\frac{1}{3}-\alpha}} = +\infty$ (D'après la croissance comparée intégrale)

d'où : $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\frac{1}{t^{\alpha}}}{\frac{\ln(t)}{t^{1/3}}} = 0$

donc : $\frac{1}{t^{\alpha}} \underset{\infty}{=} o\left(\frac{\ln(t)}{t^{1/3}}\right)$ et $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\,dt$ div car $\alpha < 1$

d'où : $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^{1/3}}$ div par comparaison des intégrales à terme positive

Q) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ puis déterminer sa valeur.

Q) Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, puis déterminer sa valeur.

Q) Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$$ puis déterminer sa valeur.

Sol (En bref)

1) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ CV car :

$\frac{1}{x(x-1)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CV

(Riemann : $\alpha = 2 > 1$)

D'où $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ CV

Q) Justifier l'existence de la somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$, puis déterminer sa valeur.

Sol (En bref)

1) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ CV car $\frac{1}{n(n-1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum \frac{1}{n(n-1)}$ CV $\square$

2) $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \underset{S!}{\overset{\text{par déf}}{=}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\underbrace{\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)}_{\text{télescopie}} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$= 1$$

Q) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ puis déterminer sa valeur.

Sol (En bref)

2) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx \underset{S!}{\overset{\text{par déf}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^{x} \frac{1}{t(t-1)}\,dt\right)$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^{x}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt\right)$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty}\left(\Big[\ln(t-1)-\ln t\Big]_2^{x}\right)$

$\displaystyle = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)+\ln 2\right)$ $\to 1$

$= \ln 2$

Q) Justifier l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, puis déterminer sa valeur.

Sol (En bref)

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ CV car $\displaystyle\frac{1}{n(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \displaystyle\sum \frac{1}{n(n-1)}$ CV $\square$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \underset{S!}{\overset{\text{par déf}}{=}} \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\right)$

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right)$ télescopie

$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)$

$= 1$

Q) Justifier l'existence de la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, puis déterminer sa valeur.

Sol (En bref)

1) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ cv car $\frac{1}{n(n-1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ cv

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n(n-1)}$ cv $\square$

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \overset{\text{par déf}}{\underset{S!}{=}} \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \right)$

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] \right)$ télescopie

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n} \right)$

$= 1$

NB

$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = +\infty$

car la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ DIV sur SATP !

NB

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^x \frac{1}{t}\,dt\right) = +\infty$$

Car $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ Div ($\alpha = 1 \leq 1$)

et positive

Q) Justifier l'existence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx$ puis déterminer sa valeur.

Sol (En bref)

2) $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(x-1)}\,dx \underset{S!}{\overset{\text{par déf}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^x \frac{1}{t(t-1)}\,dt\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\right)dt\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\left[\ln(t-1) - \ln t\right]_2^x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln 2\right)$$

$\to 0$

$$= \ln 2$$