Concours National Commun

Mathématiques II

Un corrigé proposé par : AQALMOUN Mohamed agrégé de mathématiques CPGE Khouribga

Première partie : Expression d'un déterminant

1. (a) i. $\begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & w \\ {}^t u & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & Bw \\ {}^t u & {}^t uw + \lambda \end{pmatrix}$, donc $Bw = v$ et ${}^t uw + \lambda = b$, on obtient $w = B^{-1}v$ et $\lambda = b -^t uB^{-1}v$

ii. le développement suivant la dernière colonne donne $\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+n}|B| = |B|$

iii. $B^{-1} = \frac{1}{|B|}{}^t\widetilde{B}$

iv. $\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = \left|\begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & w \\ {}^t u & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & w \\ {}^t u & \lambda \end{vmatrix} = \lambda|B| = (b -^t uB^{-1}v)|B| = b|B| -^t uB^{-1}v|B| = b|B| -^t u(|B|B^{-1})v = b|B| -^t u^t\widetilde{B}v$

(b) i. Notons $\lambda_0, ..., \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distincts de B avec $\lambda_0 = 0$ (B n'est pas inversible) et $\varepsilon = \min(|\lambda_1|, ..., |\lambda_r|)$, si $x \in]0, \varepsilon[$ alors $\forall i \in \{0, ..., r\}\ \ x \neq \lambda_i$ donc x n'est pas une valeurs propre de B et la matrice B_x est inversible.

ii. • L'application $A \to {}^t A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (espace vectoriel de dimension finie) , donc continue.

• $A \to \det A = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$, comme somme et produit des applications continues, donc continue.

iii. Soient ε comme à la question 1.2.1 , et $x \in]0, \varepsilon[$, la matrice B_x est inversible ,donc $\begin{vmatrix} B_x & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B_x| -^t u^t\widetilde{B}_x v$, par continuité des applications qui interviennes dans cette égalité et par un passage à la limite quant x tend vers 0, on obtient

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B| -^t u^t\widetilde{B}v$$

Deuxième partie : Réunion de sous-espaces vectoriels

2. (a) On suppose que $E = F_1 \cup F_2$, avec $F_1 \neq E$ et montrons que $E = F_2$
Soit $y \in E \setminus F_1 \neq \emptyset$, soit $x \in F_1$, on a $x + y \in E = F_1 \cup F_2$, donc $x + y \in F_1$ ou $x + y \in F_2$, de plus $x + y \in F_2$, car si $x + y \in F_1$ alors $y = (x + y) + (-x) \in F_1$ ce qui n'est pas le cas , donc $x = (x + y) + (-y) \in F_2$, alors $F_1 \subset F_2$ d'où $E = F_2$

(b) i. $x \in F \cup F_r$ et $x \notin F$, donc $x \in F_r$
S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x \in F_r$ alors $y = (y + \lambda x) + (-\lambda x) \in F_r$ contradiction.Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \notin F_r$

ii. Soients $\beta_1, ..., \beta_{r+1}$, $n+1$ scalaires deux à deux distincts , on a $\forall i \in \{1, ..., r+1\}$, $y+\beta_i x \in F_1 \cup ... \cup F_r$, puisque les éléments $x + \beta_1 y, ..., x + \beta y$ sont deux à deux distincts , alors (Principe du berger) l'une des parties $F_1, ..., F_r$ contient au moins deux éléments, d'où le résultat.

iii. $y+\alpha x \in F_k$ et $y+\beta x \in F_k$, donc $(\alpha-\beta)x = (y+\alpha x)-(y+\beta x) \in F_k$ et puisque $\alpha-\beta \neq 0$, alors $x \in F_k \subset F$ contradiction.
La conclusion : $E = F$ ou $E = F_r$

(c) Par recurrence sur r
Le résultat est déjà démontrer pour $r = 2$, supposons maintenant que le résultat est vrai pour $r - 1$ sous-espaces vectoriels $r - 1 \geq 2$ et montrons le pour r sous-espaces vectoriels

Si $E = F_1 \cup ... \cup F_r$ alors d'après la conclusion de la question précédente $E = F_r$ ou $E = F_1 \cup ... \cup F_{r-1}$
Si $E = F_r$, $i = r$
Si $E = F_1 \cup ... \cup F_{r-1}$ alors par hypothèse de récurrence , il existe $i \in \{1, ..., r-1\}$ tel que $E = F_i$
Dans les deux cas il existe $i \in \{1, ..., r\}$ tel que $E = F_i$

Troisième partie :À propos du polynôme minimal d'une matrice

3. (a) Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A de degré n , donc le polynôme minimal de A est de degré $\leq n$

(b)

• On suppose que $\deg \pi_A = n$

Soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ lets que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i = 0$ et on pose $P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ qui est un polynôme de degré $\leq n-1$, de sorte que $P(A) = 0$, puisque $\deg P < \deg \pi_A$ alors $P = 0$, donc $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$, $\lambda_i = 0$, ainsi la famille en question est libre

• Réciproquement, supposons que $\deg \pi_A = m < n$ et posons $\pi_A = X^m + \lambda_{m-1}X^{m-1} + ... + \lambda_0$, on a $\pi_A(A) = 0$, donc $A^m = -\lambda_{m-1}A^{m-1} - ... - \lambda_0 I_n$, la famille $(I_0, ..., A^m)$ est alors liée , qui est une sous-famille de la famille $(I_n, ..., A^{n-1})$, donc cette dernière est aussi liée.

(c) i. • Si P , $Q \in I_{A,v}$, alors $(P+Q)(A)v = (P(A)+Q(A))v = P(A)v + Q(A)v = 0$, donc $P + Q \in I_{A,v}$

• Si $P \in I_{A,v}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $(QP)(A)v = Q(A)P(A)v = Q(A)0 = 0$, donc $QP \in I_{A,v}$
Il existe alors un polynôme Q engendrant $I_{A,v}$, donc $Q_1 = \frac{1}{dom(Q)}Q$ est un polynôme unitaire engendrant $I_{A,v}$ et si Q_2 est un autre polynôme unitaire engendrant $I_{A,v}$ alors Q_1 divise Q_2 et Q_2 divise Q_1 ,et puisqu'ils sont unitaires alors $Q_1 = Q_2$

ii. On a $\pi_A(A)v = 0$ donc $\pi_A \in I_{A,v} = (\pi_{A,v})$, il existe alors $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_A = Q\pi_{A,v}$, donc $\pi_{A,v}$ divise π_A
Le polynôme π_A s'écrit $\pi_A = \Pi_{i=0}^{s} P_i^{\alpha_i}$ où les P_i , $i \in \{0, ..., s\}$ sont des polynômes irréductibles (unitaires),et les $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$,d'après ce qui précède
$\{\pi_{A,w} \ ; \ w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} \subset$ l'ensemble des diviseurs unitaires de $\pi_A =$
$\{\Pi_{i=0}^{s} P_i^{\beta_i} \ ; \ \forall i \in \{0, ..., s\}, \ 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i\}$ qui est un ensemble fini, donc $\{\pi_{A,w} \ ; \ w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ est aussi fini.

iii. D'abord, pour tout $k \in \{1, ..., r\}$, $F_k = \ker \pi_{A,v}$ qui est un sous espace vectoriel
Soit $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe $k \in \{1, ..., r\}$ tel que $\pi_{A,v} = \pi_{A,v_k}$, donc $\pi_{A,v_k}(A)v = \pi_{A,v}(A)v = 0$, et donc $v \in F_k$, par suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = F_1 \cup ... \cup F_r$

iv. On a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = F_1 \cup ... \cup F_r$, d'après le résultat de la deuxième partie , il existe $k \in \{1, ..., r\}$ tel que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = F_k = \ker \pi_{A,v_k}(A)$, donc $\pi_{A,v_k}(A) = 0$ ainsi π_{A,v_k} est un polynôme annulateur de A, le polynôme π_A est alors un diviseur de π_{A,v_k} , et comme π_{A,v_k} divise aussi π_A , il existe alors $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\pi_A = \lambda\pi_{A,v_k}$, d'autre part ces deux polynômes sont unitaires, donc $\lambda = 1$, d'où $\pi_A = \pi_{A,v_k}$

(d) Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = e_3$ et $Ae_3 = ce_1 + be_2 + ae_3$, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = -X^3 + aX^2 + bX + c$, on a π_{A,e_1} divise π_A donc π_{A,e_1} divise χ_A , raisonnons sur le degré de π_{A,e_1},on a $e_1 \neq 0$ donc $1 \leq \deg \pi_{A,e_1} \leq 3$:
• Si $\deg \pi_{A,e_1} = 1$, il existe alors $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\pi_{A,e_1} = X + \alpha$, on obtient $Ae_1 + \alpha e_1 = 0$, c'est-à-dire $e_2 + \alpha e_1 = 0$ ce qui est impossible.
• Si $\deg \pi_{A,e_1} = 2$, ils existent $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\pi_{A,e_1} = X^2 + \alpha X\beta$, on obtient $A^2e_1 + \alpha Ae_1 + \beta e_1 = 0$ c'est-à-dire $e_3 + \alpha e_2 + \beta e_1 = 0$ ce qui est impossible.
Donc $\deg \pi_{A,e_1} = 3 \geq \pi_A$ et π_{A,e_1} divise π_A et les deux polynômes sont unitaires alors $\pi_{A,e_1} = \pi_A = X^3 - aX^2 - bX - c$

(e) i. • On suppose que $\deg \pi_A = n$, d'après la question 3.3.4 il existe $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\pi_A = \pi_{A,v}$, en particulier $\deg \pi_{A,v} = n$, montrons que la famille $(v, Av, ..., A^{n-1}v)$ est libre , soient $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i v = 0$, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i X^i$ est

alors un élément de $I_{A,v} = (\pi_{A,v}) = (\pi_A)$, donc π_A divise P qui est de degré $\leq n-1$,donc nulle , ainsi $0 \leq \forall i \leq n-1$, $\lambda_i = 0$.
Notons B la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v, Av, ..., A^{n-1}v$, pris dans cet ordre, la matrice B est inversible , donc de même pour la matrice ${}^tB$ est inversible, Soit $x \in \mathbb{K}^n$ on a ${}^tx \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe alors $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que ${}^tx =^t Bu$, donc $x =^t uB$, et puisque la i^{ime} ligne de ${}^tuB$ est la produit de ${}^tu$ par la i^{ime} colonne de B, donc $x = ({}^tuv,\ {}^tuAv, ...,\ {}^tuA^{n-1}v)$

ii. On suppose (iii) et montrons (i), par la caractérisation 3.2, il suffit de montrer que la famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est libre , soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i = 0$, pour $j \in \{1, ..., n\}$,il existe $(u, v) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$ tel que $e_j = ({}^tuv, {}^tuAv, ..., {}^tuA^{n-1}v)$ où e_j est le i^{ime} vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, donc $0 =^t u(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i)v = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i^t uA^iv = \lambda_j$, donc la famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est libre.

Quatrième partie : Démonstration du résultat proposée

4. (a) Si A répond à la question , on a $\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) X^{n-1} + ... + \det A$, remarquons que le coefficient de X^{n-1} est $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$, le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme $(-1)^n P$ est $(-1)^n c_1$, donc $\operatorname{tr} A = -c_1$, d'autre part $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B + b$ et $(-1)^{n-2} \operatorname{tr} B = (-1)^{n-1}\alpha_1$ (c'est le coefficient de X^{n-2} dans χ_B) , donc $b = \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} B = -c_1 + \alpha_1 = \alpha_1 - c_1$

(b) **Une famille de polynômes** :

i. Pour tout $p \in \{0, ..., n-2\}$, on a $\deg U_p = p$, donc la famille $(U_0, ..., U_{n-2})$ est libre de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$

ii. Soit $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$, comme $(U_0, ..., U_{n-2})$ est libre dans $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ et $\dim \mathbb{K}_{n-2}[X] = n-1$, donc c'est une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$, ils existent alors $\lambda_0, ..., \lambda_{n-2} \in \mathbb{K}$ tels que $Q = \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k U_k$,la matrice B est taille $n-1$ dont le polynôme minimal est de degré $n-1$,donc d'après 3.5 B vérifie l'assertion (iii) (en dimension $n-1$) , pour $x = (\lambda_0, ..., \lambda_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}$, il existe $(y, z) \in (\mathcal{M}_{n-1,1})^2$ tel que $x = ({}^tyz, {}^tyBz, ..., {}^tyB^{n-2}z) = (\lambda_0, ..., \lambda_{n-2})$, on obtient $Q = \sum_{k=0}^{n-2} {}^tyB^kzU_k$

(c) **Expression d'une matrice** :

i. on a

$$\begin{aligned}
\chi_B(x) - \chi_B(\lambda) &= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (x^{n-1-k} - \lambda^{n-1-k}) \\
&= (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k (x^{n-1-k} - \lambda^{n-1-k}) \\
&= (-1)^{n-1}(x - \lambda) \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k (\sum_{p=0}^{n-2-k} \lambda^p x^{n-2-k-p}) \\
&= (-1)^{n-1}(x - \lambda) \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{p=0}^{n-2-k} \alpha_k \lambda^p x^{n-2-k-p}
\end{aligned}$$

Pour k et $p \in \{0, ..., n-2\}$, on pose $a_{k,p} = \alpha_k \lambda^p x^{n-2-k-p}$ si $p \leq n-2-k$, et $a_{k,p} = 0$ sinon, de sorte que $\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{p=0}^{n-2-k} \alpha_k \lambda^p x^{n-2-k-p} = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{p=0}^{n-2-k} a_{k,p} = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{p=0}^{n-2} a_{k,p}$
Remarquons que dans la dernière formule les deux paramètres p et k sont indépendants , ce qui permet de permuter les deux sommes , donc

$\sum_{k=0}^{n-2}\sum_{p=0}^{n-2} a_{k,p} = \sum_{p=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2} a_{k,p}$, par definition des $a_{k,p}$, si $n-2-k < p$ alors $a_{k,p} = 0$ c'est-à-dire si $n-2-p < k$ alors $a_{k,p} = 0$, on obtient $\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2} a_{k,p} = \sum_{p=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2-p} a_{k,p}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\chi_B(x) - \chi_B(\lambda) &= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2-p} a_{k,p}\\ &= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-2-p} \alpha_k \lambda^p x^{n-2-k-p}\\ &= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)\lambda^p\end{aligned}$$

ii. Soit $x \in \mathbb{K}$, et considérons le polynôme $R = \chi_B - \chi_B(x) + (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)\lambda^p$, d'après la question précédente , on a $\lambda \in \mathbb{K}$, $H(\lambda) = 0$, donc H à une infinités des racines , le polynôme H est alors nul, donc

$\chi_B(x) - \chi_B = (-1)^{n-1}(x-X)\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)X^p = (-1)^n(X-x)\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)X^p$

on en déduit que $\chi_B(x)I_{n-1} - \chi_B(B) = (-1)^n(B - xI_{n-1})\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p$.

D'où $\chi_B(x)I_{n-1} = (-1)^n(B - xI_{n-1})\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p$

iii. La formule de la question précédente s'écrit

$(B - xI_{n-1})((-1)^n\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p) = \det(B - xI_{n-1})I_{n-1}$

• Si $x \notin sp(B)$, alors $\det(B - xI_{n-1}) \neq 0$ et la matrice $(B - xI_{n-1})$ est inversible et

$(B - xI_{n-1})^{-1} = \frac{1}{\det(B-xI_{n-1})}((-1)^n\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p) = \frac{1}{\det(B-xI_{n-1})}\ {}^t(\widetilde{B - xI_{n-1}})$, donc

${}^t(\widetilde{B - xI_{n-1}}) = (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^p$

• Si $x \in sp(B)$, le spectre de B est une partie finie (ou vide) de $\mathbb{K}$, donc $\mathbb{K}\setminus sp(B)$ est une partie dense de $\mathbb{K}$, elle existe alors une suite $(x_m)_m$ d'éléments de $\mathbb{K}\setminus sp(B)$ convergeant vers x, on a alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x_m \notin sp(B)$ et

${}^t(\widetilde{B - x_mI_{n-1}}) = (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x_m)B^p$, par continuité des applications $x \to U_p(x)$, $x \to B - xI_{n-1}$, $A \to \widetilde{A}$ et $A \to^t A$,et en passant à la limite quant $m \to +\infty$, on obtient le résultat.

(d) **Résolution du problème** :

i. En utilisant la question 1.1.4 , on trouve :

$\begin{vmatrix} B - xI_{n-1} & v \\ {}^tu & b-x \end{vmatrix} = (b-x)|B - xI_{n-1}| -^t u^t(\widetilde{B - I_{n-1}})v$, donc

$\chi_A = (b-x)|B - xI_{n-1}| -^t u^t\widetilde{B - I_{n-1}}v$

$= (b-x)\chi_B -^t u(-1)^n\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)B^pv = (b-x)\chi_B - (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2} U_p(x)^tuB^pv$

$\chi_B = (-1)^{n-1}(x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + H_1(x))$ où H_1 est un polynôme de degré $\leq n-3$,dont les coefficients ne dépendent que des coefficients de χ_B, donc
$(b-x)\chi_B = (-1)^n(x^n + (\alpha_1 - b)x^{n-1} \quad \underbrace{-bx^{n-2} - bH_1(x) + xH_1(x)}_{H(x) \text{ où } H \text{ est un polynôme de degré} \leq n-2} \quad)$, et les coefficients de H ne dépendent que de b et des coefficients de χ_B

ii. $b = \alpha_1 - c_1$, d'après la question précédente,on a

$\chi_A = (-1)^n(X^n + c_1X^{n-1} + H) - (-1)^n \sum_{p=0}^{n-2} {}^t uB^p vU_p$, on a aussi

$(-1)^n P = (-1)^n(X^n + c_1X^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k})$, donc

$\chi_A = (-1)^n P$ si, et seulement si, $H - \sum_{p=0}^{n-2} {}^t uB^p vU_p = \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k}$ si, et seulement si,

$H - \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k} = \sum_{p=0}^{n-2} {}^t uB^p vU_p$

iii. Le polynôme $H - \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k}$ est de degré $\leq n-2$, d'après la question 4.2.2 il existe $(u, v) \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ tel que $H - \sum_{k=2}^{n} c_k X^{n-k} = \sum_{p=0}^{n-2} {}^t uB^p vU_p$,alors $\chi_A = (-1)^n P$,donc la matrice A répond au problème posé.