Topologie 3

Exercice 1 :

E l'espave vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme infinie N.
D et L sont les endomorphismes de E définis pour toute suite $u = (u_n)_n$ par :

$$(D(u))_n = u_{n+1} \; et \; (L(u))_n = u_{n+1} - u_n$$

Montrer que D et L sont continues sur E.

Exercice 2 :

E l'espave vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme infinie N_1.
F l'espave vectoriel des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente.

On munit F de la norme N_2 définie par : $N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Pour $a \in E$ et $u \in F$ on note : $f(a,u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$

1) Justifier que N_2 est effectivement une norme sur F, puis que f(a,u) existe.
2) Fixons $u \in F$. Montrer que l'application $a \mapsto f(a,u)$ est continue sur E.
3) Fixons maintenant $a \in E$. Montrer que l'application $u \mapsto f(a,u)$ est continue sur F.

Exercice 3 :

$E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$
On munit E des normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(f) = ||f||_\infty \; et \; N_2(f) = ||f||_2$$

et on munit F de la norme N_3 définie par :

$$N_3(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$$

Considérons l'application $T : E \to F$, $f \mapsto T(f)$ où $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

1) Montrer que T est une application linéaire continue pour N_1.
2) Soit $g \in E$ fixé. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme linéaire continue sur E pour la norme N_2.

Exercice 4 :

Montrer que :

1) L'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
   Indice : Montrer que c'est une partie étoilée
2) $SO_2(\mathbb{R})$ est une partie connexe par arcs de $M_2(\mathbb{R})$.
3) La sphère unité d'un evn de dimension finie $n \succeq 2$ est connexe par arcs.
4) L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.