Nombres complexes

Nombres complexes

Exercice 1 [02025] [correction]
Soit $z \in U \backslash \{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 2 [02026] [correction]
Soient $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $f : \mathbb{C} \backslash \{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

a) Montrer que tout élément de P à son image par f dans D.
b) Montrer que tout élément de D possède un unique antécédent par f dans P.

Exercice 3 [02027] [correction]
a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.
b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 4 [02028] [correction]
Calculer pour $\theta \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

Exercice 5 [02029] [correction]
Calculer pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$$

Exercice 6 [03458] [correction]
Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que $|z_0| \neq r$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle dans $\mathbb{C}$ de centre z_0 et de rayon r.
a) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

b) En déduire que l'image de $\mathcal{C}$ par l'application $f : z \mapsto 1/z$ est un cercle dont on précisera centre et rayon en fonction de z_0 et r.

Module et argument

Exercice 7 [02030] [correction]
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 8 [02031] [correction]
Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z' = \lambda.z$$

Exercice 9 [02032] [correction]
Etablir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \leqslant |z + z'| + |z - z'|$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 10 [02356] [correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|$$

et préciser les cas d'égalité.

Exercice 11 [02033] [correction]
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{i\theta} + 1$ et de $\mathrm{e}^{i\theta} - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 [02034] [correction]
Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ pour $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$.

Exercice 13 [02035] [correction]
Déterminer module et argument de $e^{i.\theta} + e^{i.\theta'}$ pour $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 [02646] [correction]
Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vérifie

$$e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$$

montrer

$$e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$$

Exercice 15 [00055] [correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leqslant 1$$

Exercice 16 [03040] [correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 17 [03107] [correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z \in B$ alors $1 - z + z^2 \in B$ et $1 + z + z^2 \in B$.
Déterminer B.

Exercice 18 [03249] [correction]
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}$$

Déterminer les valeurs prises par f.

Exercice 19 [03457] [correction]
En étudiant module et argument, établir que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(z)$$

Exercice 20 [03642] [correction]
a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\,|z_1|^2 + 2\,|z_2|^2$$

b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \leqslant 1$ et $|z_2| \leqslant 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leqslant \sqrt{2}$$

Exercice 21 [03651] [correction]
Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}^{+\star}$$

Exercice 22 [03880] [correction]
Soient a, b, c des réels strictement positifs.
A quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\bar{t} = a^2, u\bar{u} = b^2 \text{ et } v\bar{v} = c^2$$

Racines de l'unité

Exercice 23 [02036] [correction]
Calculer le produit des racines de l'unité

Exercice 24 [02037] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note U_n l'ensemble des racines n ème de l'unité.
Calculer

$$\sum_{z \in U_n} |z - 1|$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 25 [03353] [correction]
Soient $n \geqslant 3$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.
a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,

$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p$$

b) Calculer

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega_i}$$

Exercice 26 [02038] [correction]
Soit ω une racine $n$ème de l'unité différente de 1. On pose

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\omega^k$$

En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 27 [02039] [correction]
Simplifier :

$$\text{a) } j(j+1) \quad \text{b) } \frac{j}{j^2+1} \quad \text{c) } \frac{j+1}{j-1}$$

Exercice 28 [02040] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n$$

Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 29 [02041] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^n + 1 = 0$$

Exercice 30 [02042] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

Observer que celle-ci admet exactement $n-1$ solutions, chacune réelle.

Exercice 31 [02043] [correction]
Soit $\omega = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

Exercice 32 [02044] [correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.
a) Etablir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.
c) En déduire l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 33 [02531] [correction]
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

Résolution d'équations et de systèmes

Exercice 34 [02045] [correction]
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ?
Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 35 [02046] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :
a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$ b) $z^4 - (5 - 14i)z^2 - 2(12 + 5i) = 0$.

Exercice 36 [02047] [correction]
a) Déterminer les racines carrées complexes de $5 - 12i$.
b) Résoudre l'équation $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.
c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 37 [02048] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases}$$

Exercice 38 [02049] [correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$$

Exercice 39 [02050] [correction]
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \bar{z} = |z|$$

Exercice 40 [02051] [correction]
Soit $Z \in \mathbb{C}^\star$. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = Z$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 41 [02052] [correction]
Résoudre l'équation $|z + 1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 42 [02053] [correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, lorsqu'elle a un sens, l'équation :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Puisque $z \in U$, on a $\bar{z} = 1/z$ donc

$$\overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} = \frac{1/z+1}{1/z-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$$

puis

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$$

Exercice 2 : [énoncé]
a) Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$|f(z)|^2 = \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} = \frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}$$

Si $y > 0$ alors $x^2+(y-1)^2 < x^2+(y+1)^2$ donc $|f(z)| < 1$. Ainsi,

$$\forall z \in P, f(z) \in D$$

b) Soit $Z \in D$.

$$Z = \frac{z-i}{z+i} \Leftrightarrow z = i\frac{1+Z}{1-Z}$$

avec

$$i\frac{1+Z}{1-Z} = i\frac{1+Z-\bar{Z}-Z\bar{Z}}{|1-Z|^2} = -\frac{2\mathrm{Im}(Z)}{|1-Z|^2} + i\frac{1-|Z|^2}{|1-Z|^2} \in P$$

Ainsi,

$$\forall Z \in D, \exists! z \in P, f(z) = Z$$

Exercice 3 : [énoncé]
a) $M = I$ est solution.
Pour $M \neq I$, I, M, M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'} = \lambda\overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{iz-i}{z-i} \in \mathbb{R}$.
Posons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
$\mathrm{Im}\left(\frac{iz-i}{z-i}\right) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)+y(y-1) = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.
Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega\left|\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega'\left|\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 4 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta} = \frac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1} = \mathrm{e}^{in\theta/2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Ainsi

$$C_n = \cos\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \sin\frac{n\theta}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 5 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{ik\theta} = (1+\mathrm{e}^{i\theta})^n = 2^n\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Ainsi

$$C_n = 2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2} \text{ et } S_n = 2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) On a

$$z \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z-z_0|^2 = r^2$$

et en développant

$$|z-z_0|^2 = (z-z_0)\overline{(z-z_0)} = z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + z_0\bar{z}_0$$

b) Notons que $0 \notin \mathcal{C}$ puisque $|z_0| \neq r$. On peut donc considérer l'image $f(\mathcal{C})$.
Soit $Z = f(z)$ avec $z \in \mathcal{C}$. Puisque

$$|z|^2 - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + |z_0|^2 = r^2$$

on a

$$1 - \frac{z_0}{z} - \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}} + \frac{|z_0|^2 - r^2}{z\bar{z}} = 0$$

donc

$$1-z_0Z-\bar{z}_0\bar{Z}+\left(|z_0|^2-r^2\right)|Z|^2=0$$

ce qui se réécrit

$$|Z|^2-\frac{z_0}{|z_0|^2-r^2}Z-\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2-r^2}\bar{Z}=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}$$

Posons alors

$$Z_0=\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2-r^2}$$

et l'on obtient

$$|Z|^2-\bar{Z}_0Z-Z_0\bar{Z}+|Z_0|^2=\frac{1}{r^2-|z_0|^2}+\frac{|z_0|^2}{\left(|z_0|^2-r^2\right)^2}=\frac{r^2}{\left(|z_0|^2-r^2\right)^2}$$

Ainsi Z appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre Z_0 et de rayon $\frac{r}{\left||z_0|^2-r^2\right|}$.
Inversement, en reprenant les calculs en sens inverse, on obtient que tout point Z de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un certain z de $\mathcal{C}$.

Exercice 7 : [énoncé]
$|z|^2=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$ donc $|z|=2$.
Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0,\pi/2]$ car $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$.
On a $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ donc

$$\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec $2\theta\in[0,\pi]$ donc $2\theta=\pi/4$ puis $\theta=\pi/8$.

Exercice 8 : [énoncé]
($\Leftarrow$) ok
($\Rightarrow$) Si $|z+z'|=|z|+|z'|$ alors, en divisant par $|z|$: $|1+x|=1+|x|$ avec $x=z'/z\in\mathbb{C}$.
Ecrivons $x=a+ib$ avec $a,b\in\mathbb{R}$.

$$|1+x|^2=(a+1)^2+b^2=1+a^2+b^2+2a$$

et

$$(1+|x|)^2=(1+\sqrt{a^2+b^2})^2=1+a^2+b^2+2\sqrt{a^2+b^2}$$

$|1+x|=1+|x|$ donne alors $a=\sqrt{a^2+b^2}$ d'où $b=0$ et $a\geqslant 0$.
Par suite $x\in\mathbb{R}^+$ et on conclut.

Exercice 9 : [énoncé]
On a

$$|z|+|z'|=\frac{1}{2}|(z-z')+(z+z')|+\frac{1}{2}|(z'-z)+(z'+z)|\leqslant|z+z'|+|z-z'|$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.
Il y a égalité si, et seulement si, : $z-z'=0$ (i.e. $z=z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'}\in\mathbb{R}^+$ et $\frac{z+z'}{z'-z}\in\mathbb{R}^+$ ce qui se résume à $z'=-z$.

Exercice 10 : [énoncé]
Si $a=0$, l'inégalité est vraie avec égalité si, et seulement si, $b=0$.
Si $a\neq 0$, l'inégalité revient à

$$1+|u|\leqslant|1+u|+|1-u|$$

avec $u=b/a$. En écrivant $u=x+iy$,

$$\begin{aligned}(1+|u|)^2&=1+2\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\\&\leqslant 2+2(x^2+y^2)\\&=|1+u|^2+|1-u|^2\\&\leqslant(|1+u|+|1-u|)^2\end{aligned}$$

avec égalité si, et seulement si, $x^2+y^2=1$ et $\left|1-u^2\right|=0$ soit $u=\pm1$ ce qui revient à $a=\pm b$.

Exercice 11 : [énoncé]
$z=\mathrm{e}^{i\theta}+1=2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$.
Si $\cos\frac{\theta}{2}>0$ alors $|z|=2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)=\frac{\theta}{2}\quad[2\pi]$, si $\cos\frac{\theta}{2}=0$ alors $|z|=0$.
et si $\cos\frac{\theta}{2}<0$ alors $|z|=-2\cos\frac{\theta}{2}$ et $\arg(z)=\frac{\theta}{2}+\pi\quad[2\pi]$.
$z'=\mathrm{e}^{i\theta}-1=2i\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$ et la suite est similaire.

Exercice 12 : [énoncé]
En factorisant $\mathrm{e}^{i\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}+1}=\frac{i\sin\theta/2}{\cos\theta/2}=i\tan\frac{\theta}{2}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 13 : [énoncé]
On peut factoriser

$$\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{i\theta'}=\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}(\mathrm{e}^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}})=2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\frac{\theta-\theta'}{2}$.

Exercice 14 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{iy}+\mathrm{e}^{iz}=0$, en multipliant par e^{-ix}, on obtient

$$1+\mathrm{e}^{i\alpha}+\mathrm{e}^{i\beta}=0$$

avec $\alpha=y-x$ et $\beta=z-x$. En passant aux parties réelle et imaginaire

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-1\\ \sin\alpha+\sin\beta=0\end{cases}$$

L'équation $\sin\alpha+\sin\beta=0$ donne

$$\alpha=-\beta\quad[2\pi]\ \text{ ou } \alpha=\pi+\beta\quad[2\pi]$$

Si $\alpha=\pi+\beta\quad[2\pi]$ alors la relation $\cos\alpha+\cos\beta=-1$ donne $0=-1$.
Il reste $\alpha=-\beta\quad[2\pi]$ et alors $2\cos\alpha=-1$ donne $\alpha=\pm 2\pi/3\quad[2\pi]$.
Par suite $\mathrm{e}^{i\alpha}=j$ ou j^2.
On obtient alors aisément $1+\mathrm{e}^{2i\alpha}+\mathrm{e}^{2i\beta}=0$ puis $\mathrm{e}^{2ix}+\mathrm{e}^{2iy}+\mathrm{e}^{2iz}=0$.

Exercice 15 : [énoncé]
Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z\neq 1/\bar{a}$.
Si tel est le cas

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow |z-a|^2\leqslant|1-\bar{a}z|^2$$

Sachant $|x+y|^2=|x|^2+2\mathrm{Re}(\bar{x}y)+|y|^2$, on obtient

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow\left(|a|^2-1\right)\left(|z|^2-1\right)\geqslant 0$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 16 : [énoncé]
Soit z un complexe du cercle unité avec $z\neq 1$. Il existe $\theta\in\,]0,2\pi[$ tel que $z=\mathrm{e}^{i\theta}$.
On a alors

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\theta}}=\mathrm{e}^{-i\theta/2}\frac{i}{2\sin\theta/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\mathrm{cotan}\frac{\theta}{2}$$

Quand θ parcourt $]0,2\pi[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\mathrm{cotan}(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x=1/2$.

Exercice 17 : [énoncé]
On observe que $B=\{i,-i\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ et $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définies par

$$f(z)=1-z+z^2\text{ et }g(z)=1+z+z^2$$

On remarque

$$|f(z)-i|=|z+i|\,|z-(1+i)|\,,\ |f(z)+i|=|z-i|\,|z-(1-i)|$$

$$|g(z)-i|=|z-i|\,|z+1+i|\ \text{ et }\ |g(z)+i|=|z+i|\,|z+1-i|$$

Soient $a\in B$ et $(z_n)_{n\geqslant 0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$z_{n+1}=\begin{cases}f(z_n) & \text{si }\mathrm{Re}(z_n)\leqslant 0\\ g(z_n) & \text{si }\mathrm{Re}(z_n)>0\end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n=\left|z_n^2+1\right|=|z_n-i|\,|z_n+i|$$

Si $\mathrm{Re}(z_n)\leqslant 0$ alors

$$u_{n+1}=|f(z_n)-i|\,|f(z_n)+i|=u_n\,|z_n-(1+i)|\,|z_n-(1-i)|$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $|z_n-(1+i)|$ et $|z_n-(1-i)|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1.
Ainsi

$$u_{n+1}\geqslant\sqrt{2}u_n$$

Si $\mathrm{Re}(z_n)>0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0\neq 0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0=0$ puis $a=\pm i$. Ainsi $B\subset\{i,-i\}$.
Sachant $B\neq\emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-i$ et inversement, on peut conclure

$$B=\{i,-i\}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 18 : [énoncé]
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $z \in \mathbb{R}^-$ alors $f(z) = 0$.
Sinon, on peut écrire $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$ et alors

$$f(z) = r\frac{1 + \mathrm{e}^{i\theta}}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{i\theta/2}$$

Puisque $\cos(\theta/2) \geqslant 0$

$$|f(z)| = r\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}Z > 0\}$$

Inversement, soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}Z > 0$.
On peut écrire $Z = R\mathrm{e}^{i\alpha}$ avec $R > 0$ et $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$. Pour

$$z = \frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{2i\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = R\mathrm{e}^{i\alpha} = Z$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 19 : [énoncé]
Posons $x = \mathrm{Re}z$ et $y = \mathrm{Im}z$. On a

$$1 + \frac{z}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) + \mathrm{i}\,\frac{y}{n}$$

Pour n assez grand, on a $1 + x/n > 0$ et donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n\mathrm{e}^{in\theta_n} \text{ avec } r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan\frac{y/n}{1 + x/n}$$

Quand $n \to +\infty$

$$r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{n}{2} \times \left(\frac{2x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \to \exp(x)$$

et

$$n\theta_n \sim n \times \frac{y}{n} \to y$$

donc

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp(x)\mathrm{e}^{iy} = \exp(z)$$

Exercice 20 : [énoncé]
a) En développant

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.
b) On a

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 \leqslant 4$$

donc parmi les quantités $|z_1 + z_2|$ et $|z_1 - z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 21 : [énoncé]
Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u = \bar{u}$.
On a alors

$$(z - a)^2 = (z - a)\left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{a}}\right) = \frac{(z - a)(\bar{a} - \bar{z})}{\bar{a}\bar{z}} = -a\frac{|z - a|^2}{\bar{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z - a}{z - b}\right)^2 = \frac{|z - a|^2}{|z - b|^2} \in \mathbb{R}^{+\star}$$

Exercice 22 : [énoncé]
En multipliant les trois complexes t, u, v par $\mathrm{e}^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t \in \mathbb{R}^+$ auquel cas $t = a$.
En écrivant $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ avec $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$, la condition $t + u + v = 0$ donne

$$\begin{cases} x' = -(a + x) \\ y' = -y \end{cases}$$

et les deux conditions $u\bar{u} = b^2$ et $v\bar{v} = c^2$ équivalent alors au système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x + a)^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a, 0)$ et de rayon c. Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b - c| \leqslant a \leqslant b + c$$

On peut alors conclure que le triplet (t, u, v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a, b, c est inférieur à la somme des deux autres.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 23 : [énoncé]
Puisque le produit d'exponentielles est l'exponentielle de la somme

$$\prod_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) = \exp(i(n-1)\pi) = (-1)^{n-1}$$

Exercice 24 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

Alors

$$\sum_{z\in U_n} |z-1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = 4\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\pi/n}}\right) = 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2\cot\frac{\pi}{2n}$$

Exercice 25 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$$

a) Si n ne divise par p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega^p \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-ik\pi/n}\frac{1}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{i}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1} \cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \cdots$$

Exercice 26 : [énoncé]
On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - n\omega^n = -n$$

donc

$$S = \frac{n}{\omega-1}$$

Exercice 27 : [énoncé]
a)

$$j(j+1) = j^2 + j = -1$$

b)

$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1$$

c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}$$

Exercice 28 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ les racines $n$ème de l'unité.
Si z est solution alors nécessairement $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc il existe $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1$$

Si $k = 0$ alors ce la donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.
Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = -i\cot\frac{k\pi}{n}$$

Inversement, en remontant le calcul : ok
Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{-i\cot\frac{k\pi}{n}/k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}$$

Puisque la fonction cot est injective sur $]0, \pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 29 : [énoncé]
On a

$$z^n + 1 = 0 \Leftrightarrow z^n = \mathrm{e}^{i\pi}$$

$z_0 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$ est solution particulière de l'équation et donc

$$\mathcal{S} = \{z_0\omega_k/k \in \{0, \dots, n-1\}\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{(2k+1)\pi}{n}}/k \in \{0, \dots, n-1\}\right\}$$

Exercice 30 : [énoncé]
$z = i$ n'est pas solution.
Pour $z \neq i$,

$$(z+i)^n = (z-i)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, \frac{z+i}{z-i} = \omega_k$$

en notant $\omega_k = \mathrm{e}^{2ik\pi/n}$.
Pour $k = 0$, $\omega_k = 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ n'a pas de solution.
Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $\omega_k \neq 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \omega_k$ a pour solution

$$z_k = i\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}$$

Ainsi $\mathcal{S} = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ avec

$$z_k = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}}} = \cot\frac{k\pi}{n} \in \mathbb{R}$$

deux à deux distincts car cot est strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$ où évoluent les $\frac{k\pi}{n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 31 : [énoncé]
On a

$$1 + A + B = 0,\ AB = 2 \text{ et } \mathrm{Im}(A) > 0$$

donc

$$A = \bar{B} = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 32 : [énoncé]
a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k)$$

Or on a aussi $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.
b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.
c) Pour $z = 1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,

$$1 - \omega^k = -\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}} 2i\sin\frac{k\pi}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1}\mathrm{e}^{i\frac{k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1}k} = i^{n-1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

puis la relation proposée.

Exercice 33 : [énoncé]
Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$$

Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation
$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$
et donc
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc
$$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$
puis
$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$
et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geqslant 0$.

Exercice 34 : [énoncé]
$x = 1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$ ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$.
Lorsque $a = -1$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Lorsque $a = 3$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+i3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+i3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 35 : [énoncé]
a) $\mathcal{S} = \{1, -1+2i\}$,
b) $\mathcal{S} = \{-1+i, -3+2i, 1-i, 3-2i\}$.

Exercice 36 : [énoncé]
a) $\pm(3-2i)$
b) $a = -2i, b = -1+3i$ et $c = 2+i$
c) $|c-b| = |c-a| = \sqrt{13}$ et $|b-a| = \sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 37 : [énoncé]
Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation
$$z^2 - (1+i)z + (2-i) = 0$$
On obtient l'ensemble solution
$$\mathcal{S} = \{(1+2i, -i), (-i, 1+2i)\}$$

Exercice 38 : [énoncé]
On a
$$4\sqrt{2}(1+i) = 8\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$
donc $z_0 = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$ est solution particulière de l'équation.
L'équation $z^3 = z_0^3$ équivaut alors à l'équation $(z/z_0)^3 = 1$ dont l'ensemble solution est
$$\mathcal{S} = \left\{z_0, z_0 j, z_0 j^2\right\}$$

Exercice 39 : [énoncé]
Soit $M(z)$ solution avec $z = a+ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.
On a $2a = \sqrt{a^2+b^2}$ donc $a \geqslant 0$ et $b = \pm\sqrt{3}a$.
Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs $\vec{u}\left|\begin{matrix}1\\ \sqrt{3}\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}1\\ -\sqrt{3}\end{matrix}\right.$.
Inversement : ok.

Exercice 40 : [énoncé]
Posons $\rho = |Z|$ et $\theta = \arg Z \quad [2\pi]$. $\mathrm{e}^z = Z \Leftrightarrow z = \ln\rho + i\theta + 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 41 : [énoncé]
$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1$ et $(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$ donc
$|z+1| = |z| + 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 42 : [énoncé]
L'équation a un sens pour $x \neq \pi/2 \quad [\pi]$. En exploitant $\cos(kx) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{ikx})$, on peut écrire
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x}\right)$$
ce qui apparaît comme une somme géométrique.
Si $x \neq 0 \quad [\pi]$ alors $q = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{\cos x} \neq 1$ et
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x} = \frac{1}{\cos^n x}\frac{\cos^{n+1}x - \mathrm{e}^{i(n+1)x}}{\cos x - \mathrm{e}^{ix}}$$

Il reste à en déterminer la partie réelle. Puisque

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{ikx}}{\cos^k x}=\frac{1}{\cos^n x}\frac{\cos^{n+1}x-\cos(n+1)x-i\sin(n+1)x}{-i\sin x}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x(\cos x)^n}$$

Finalement, pour les x considérés

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}=0\Leftrightarrow\sin(n+1)x=0\Leftrightarrow x=0\quad[\pi/(n+1)]$$

Si $x=0\quad[\pi]$ alors x n'est pas solution car

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=n+1$$

Finalement

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{k\pi}{(n+1)}/k\in\mathbb{Z}\text{ et }(n+1)\not|k\right\}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD