Probabilités (Partie 2)

Résumé

Dans toute cette partie, (Ω, T, P) est un espace probabilisé.

I) Variable aléatoire réelle (var)

1) Généralités

Prop

X var si et ssi l'image réciproque de tout intervalle de $\mathbb{R}$ est un élément de T.

Autres notations

Soient X une var et $x \in \mathbb{R}$.

$\longrightarrow$ $X^{-1}(]-\infty, x])$ se note $(X \leqslant x)$

$\longrightarrow$ $X^{-1}(]-\infty, x[)$ se note $(X < x)$

$\longrightarrow$ $X^{-1}([x, +\infty[)$ se note $(X \geqslant x)$

$\longrightarrow$ $X^{-1}(]x, +\infty[)$ se note $(X > x)$

$\longrightarrow$ $X^{-1}(]a, b])$ se note $(a < X \leqslant b)$

→ $X^{-1}([a,b[)$ se note $(a \leq X < b)$

→ $X^{-1}(]a,b[)$ se note $(a < X < b)$

→ $X^{-1}([a,b])$ se note $(a \leq X \leq b)$

→ $X^{-1}(\{a\})$ se note $(X = a)$

→ $\overline{(X = a)}$ se note $(X \neq a)$

→ $X^{-1}(I)$ se note $(X \in I)$

où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Notation

1) X une var.

I et J deux intervalles.

$(X \in I) \cap (X \in J)$ se notera $(X \in I, X \in J)$

2) $X_1, \dots, X_n$ des var.

$I_1, \dots, I_n$ des intervalles.

$(X_1 \in I_1) \cap \dots \cap (X_n \in I_n)$ se notera $(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n)$

Prop

X var. On a :

1) i) $(X\in A\underset{et}{\cap}B)=(X\in A)\underset{et}{\cap}(X\in B)$ (càd $(X\in A, X\in B)$)

ii) $\left(X\in \bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(X\in A_i)$ (càd $(X\in A_1,\dots,X\in A_n)$)

iii) $\left(X\in \bigcap_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{+\infty}(X\in A_i)$

2) i) $(X\in A\underset{ou}{\sqcup}B)=(X\in A)\underset{ou}{\sqcup}(X\in B)$

ii) $\left(X\in \bigsqcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigsqcup_{i=1}^{n}(X\in A_i)$

iii) $\left(X\in \bigsqcup_{i=1}^{+\infty}A_i\right)=\bigsqcup_{i=1}^{+\infty}(X\in A_i)$

3) $\overline{(X\in A)}=(X\in \bar{A})$

4) $\overline{(X\leq a)}=(X>a)$

5) i) $P(X>a)=1-P(X\leq a)$

ii) $P(X\neq a)=1-P(X=a)$

6) i) $(X\leq a)\subset(X\leq a+1)$

ii) $(X<a)\subset(X\leq a)$

iii) $\left((X\leq n)\right)_n$ est une suite croissante d'événements.

iv) $(X<a+1)\setminus(X<a)=(a\leq X<a+1)$

⚠ v) $P(a\leq X<a+1)=P(X<a+1)-P(X<a)$

Prop

X var.

1) Supposons que $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$, où les x_i distincts deux à deux.

On a :

a) $(X=x_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'événements.

b) $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)=1$

2) Supposons que $X(\Omega)=\{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\}$, où les x_n distincts deux à deux.

On a :

a) $(X=x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=x_n)=1$

c) La série $\sum_{n\geq 0} P(X=x_n)$ est une SATP convergente.

Vocabulaire

Si $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on dit que X est une variable aléatoire discrète (vard).

2) Loi d'une variable aléatoire

(Ω,T,P) espace probabilisé.

Déf

Soit X une var sur Ω.

La loi de X est l'application P_X qui associe à chaque intervalle I de $\mathbb{R}$ le réel $P_X(I)$ défini par :

$$P_X(I)=P(X\in I)$$

Remarque pratique

Quand on demande de déterminer la loi d'une vard X, en réponse, on donne :

1) $D = X(\Omega)$; l'ensemble des valeurs prises par X.

2) Pour tout $a \in D$, on donne la valeur de $P(X=a)$.

3) Lois usuelles

a) Loi uniforme

Déf

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit que X suit une loi uniforme sur E si et ssi :

1) $X(\Omega) = E$

2) $\forall a \in E,\ P(X=a) = \frac{1}{n}$

$$X \sim \mathcal{U}(n) \iff \begin{cases} 1)\ X(\Omega) = [\![1, n]\!] \\ 2)\ \forall\, 1 \leq k \leq n,\ P(X=k) = \frac{1}{n} \end{cases}$$

b) Loi de Bernoulli

Déf

Soit $0 < p < 1$.

On dit que la var X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si et ssi :

1) $X(\Omega) = \{0, 1\}$

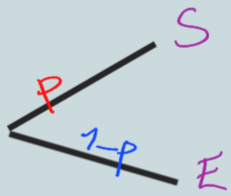
2) $P(X=1) = p$ et $P(X=0) = 1-p$

Notation On note $X \sim B(p)$

On pense à une loi de Bernoulli quand on a une expérience aléatoire à deux issues : Succès ou Echec.

La probabilité d'avoir Succès est p.

La probabilité d'avoir Echec est $(1-p)$.



La var X définie par : $\begin{cases} X = 1 & \text{si on obtient Succès} \\ X = 0 & \text{si on obtient Echec} \end{cases}$

Suit une loi de Bernoulli de paramètre p : $X \sim B(p)$

à retenir

c) Loi binomiale

Déf

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$.

On dit que la var X suit une loi binomiale de paramètres n et p si et ssi :

1) $X(\Omega) = [\![0, n]\!] = \{0, 1, \dots, n\}$

2) $\forall\, 0 \leq k \leq n,\ P(X = k) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

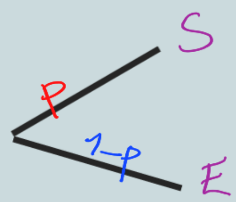
Notation On note $X \sim B(n, p)$

à retenir

On pense à une loi binomiale quand on a une expérience aléatoire à deux issus : Succès ou Echec.

La probabilité d'avoir Succès est p.

La probabilité d'avoir Echec est $(1-p)$.



On répète cette expérience n fois.

La var X égale au nombre de succès obtenus suit une loi binomiale de paramètres n et p : $X \sim B(n,p)$

d) Loi géométrique

Déf

Soit $0 < p < 1$.

On dit que la var X suit une loi géométrique de paramètre p si et ssi :

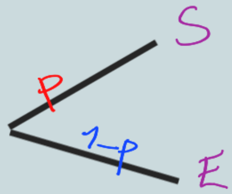
1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; P(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$

Notation On note $X \sim G(p)$

à retenir

On pense à une loi géometrique quand on a une expérience aléatoire à deux issues : Succès ou Echec.



La probabilité d'avoir Succès est p.

La probabilité d'avoir Echec est $(1-p)$.

On répète cette expérience jusqu'à l'obtention du 1^{er} succès.

La var X égale au rang d'apparition du 1^{er} succès suit une loi géometrique de paramètre p : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

e) Loi de Poisson

Déf

Soit $\lambda > 0$.

On dit que la var X suit une loi de Poisson de paramètre λ si et ssi :

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
2) $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

Notation On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

4) Variable aléatoire composée (ou Image d'une var)

Notation

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
La composée $f \circ X$ se note souvent en probabilités $f(X)$.

Prop (admise)

Soient $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une var et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si f est continue (resp. monotone) alors $f(X)$ est une var.

II) Couple de variables aléatoires réelles

1) Loi conjointe — Lois marginales

Déf

Soient X et Y deux var.
La loi du couple (X,Y) est l'application $P_{X,Y}$ qui associe à chaque $I \times J$ le réel $P_{X,Y}(I \times J)$ défini par :

$$P_{X,Y}(I \times J) = P\big((X \in I) \cap (Y \in J)\big) = P(X \in I, Y \in J)$$

où I et J des intervalles de $\mathbb{R}$.

NB : La loi du couple (X,Y) s'appelle aussi la loi conjointe de (X,Y).

Prop

Si X et Y deux var discrètes alors la loi du couple (X,Y) se détermine par la donnée des $P(X=x, Y=y)$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$.

Déf

Les lois marginales du couple (X,Y) sont la loi de X et celle de Y.

Prop

Soient X et Y deux var discrètes.
Si on connait la loi conjointe de (X,Y) alors on connaitra les lois marginales.

à retenir

Soient X et Y deux var discrètes.

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

1) $(X=x)_{x\in D}$ et $(Y=y)_{y\in D'}$ sont deux SCE.

2) $\forall x \in D$, $P(X=x) = \sum_{y\in D'} P(X=x, Y=y)$

3) $\forall y \in D'$, $P(Y=y) = \sum_{x\in D} P(X=x, Y=y)$

2) Extension

Déf

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).
La loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ est l'application $P_{X_1,\dots,X_n}$ qui associe à $I_1 \times \dots \times I_n$ le réel :

$$P_{X_1,\dots,X_n}(I_1 \times \dots \times I_n) = P(X_1 \in I_1, \dots, X_n \in I_n)$$

où $I_1, \dots, I_n$ des intervalles de $\mathbb{R}$.

Déf

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

Les lois marginales de $(X_1, \dots, X_n)$ sont les lois de $X_1, \dots, X_n$.

Prop

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes sur l'espace probabilisé (Ω, T, P).

1) La loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ se détermine par la donnée des $P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$, pour tout $x_1 \in D_1, \dots, x_n \in D_n$; où : $D_1 = X_1(\Omega), \dots, D_n = X_n(\Omega)$.

2) Si on connait la loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$, on connaitra ses lois marginales.

3) Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$

Déf

Soient X et Y deux var discrètes sur (Ω, T, P).

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

Soit $x \in D$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est l'application :

$$I \longmapsto P(Y \in I \mid X = x)$$

où I intervalle de $\mathbb{R}$.

Prop

Soient X et Y deux var discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

Soit $x \in D$ tel que $P(X=x) \neq 0$.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ est déterminée par la connaissance des $P(Y=y \mid X=x)$, pour tout $y \in D'$.

Prop

Soient X et Y deux var discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Notons $D = X(\Omega)$ et $D' = Y(\Omega)$.

Si on connaît $\begin{cases} \text{la loi de } X \\ \quad \text{et} \\ \text{la loi de } Y \text{ sachant } (X=x) \text{ pour tout } x \in D \end{cases}$

Alors on connaîtra la loi conjointe du couple (X, Y).

---

4) Indépendance de var

Déf

Soient X et Y deux var.

X et Y sont dites indépendantes si et ssi :

Pour tous intervalles I et J, $P((X \in I) \cap (Y \in J)) = P(X \in I) \cdot P(Y \in J)$

Prop

Soient X et Y deux var discrètes.

Notons $X(\Omega)=D$ et $Y(\Omega)=D'$. On a :

$$\begin{pmatrix} X \text{ et } Y \text{ sont dites} \\ \text{indépendantes} \end{pmatrix} \iff \left(\forall (x,y)\in D\times D',\ P(X=x, Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)\right)$$

Prop

Supposons que X et Y sont indépendantes, alors :

Si on connait les lois marginale du couple de var (X,Y)

Alors on connait sa loi conjointe.

Déf

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes si et ssi :

$$\forall i\neq j,\ X_i \text{ et } X_j \text{ sont indépendantes}$$

Déf (Indépendance ou indépendance mutuelle)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

On dit que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et ssi pour tous intervalles $I_1, \dots, I_n$, les événements $(X_1\in I_1), \dots, (X_n\in I_n)$ sont indépendants.

Prop

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

Si ($X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes)

Alors ($X_1, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes)

Prop

Soient $X_1, \dots, X_n$ des var.

Si ($X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes)

Alors $\left(\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, P(X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n) = P(X_1 = a_1) \dots P(X_n = a_n)\right)$

En général, on a :

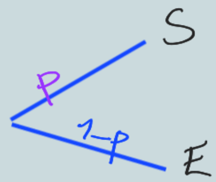
Déf (Indépendance ou indépendance mutuelle) (Cas général)

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de var sur (Ω, T, P).

$(X_i)_{i \in I}$ est dite mutuellement indépendante si et ssi pour toute famille $(J_i)_{i \in I}$ d'intervalles, la famille d'évenements $(X_i \in J_i)_{i \in I}$ est mutuellement indépendante.

On dispose d'une expérience aléatoire à deux issues : Succès ou Echec.

La probabilité d'avoir Succès est p.



On répète cette expérience n fois.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on a Succès à la } i^{\text{ème}} \text{ répétition} \\ 0 & \text{si on a Echec à la } i^{\text{ème}} \text{ répétition} \end{cases}$$

1) Il est usuel de considérer que $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

2) Notons $S = X_1 + \dots + X_n$. On a :

$$S \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Car S est le nombre de Succès obtenus lors de ces n répétitions.

Prop

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes, suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.

Alors la somme $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$.

5) Indépendance héritée

Prop (indépendance héritée)

Soient X et Y deux var et $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si $\begin{cases} X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ f \text{ et } g \text{ Continues ou monotones} \end{cases}$

Alors les var $f(X)$ et $g(Y)$ sont aussi indépendantes.

III) Espérance d'une var

1) Définition

Déf

Soit X une var discrète.

Notons $D = X(\Omega)$.

1) Si $D = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

L'espérance de X est :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) = x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n)}$$

2) Si $D = \{x_k / k \in \mathbb{N}^*\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

i) On dit que X possède une espérance, si et ssi la série $\sum_{k \geq 1} x_k P(X = x_k)$ est $\boxed{\text{absolument}}$ Convergente.

ii) Dans ce cas, l'espérance de X est :

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(X = x_k)}$$

Prop

Supp que Ω est fini.

Soit X une var sur (Ω, T, P), où $T = \mathcal{P}(\Omega)$. On a :

$$\boxed{E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})}$$

2) Espérances des lois discrètes usuelles

Prop

X	$X = c$ constante	$X \sim \mathcal{U}(n)$	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$
$E(X)$	c	$\frac{n+1}{2}$	p	np

3) Propriétés de l'espérance

Prop (Linéarité de l'espérance)

1) Si X et Y possèdent des espérances, alors il en est de même pour toute combinaison linéaire $(\lambda X + \mu Y)$.

2) Dans ce cas on a :

$$\boxed{\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)}$$

Vocabulaire

Si $E(X)=0$, on dit que X est une var Centrée.

Prop

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ E(\lambda X+\mu)=\lambda E(X)+\mu$

2) $(X-E(X))$ est Centrée.

Prop

1) $X \geqslant 0 \implies E(X)\geqslant 0$ (positivité de l'espérance)

2) $X \leqslant Y \implies E(X)\leqslant E(Y)$ (Croissance de l'espérance)

Prop

1) Soient X et Y deux var positives telles que $X \leq Y$.

Si Y possède une espérance, alors X aussi.

2) Soient X et Y deux var telles que $|X| \leq Y$.

Si Y possède une espérance, alors X aussi.

Prop (Espérance du produit de vard indépendantes)

Si X et Y deux var discrètes indépendantes et possédant chacune une espérance, alors leur produit XY possède aussi une espérance, et on a :

$$\boxed{E(XY)=E(X)E(Y)}$$

En général, on a :

Corollaire (Espérance du produit de vard indépendantes)

Soit $n \geq 2$.

Si $X_1, \dots, X_n$ des var discrètes indépendantes et possédant chacune une espérance, alors leur produit $X_1 \cdots X_n$ possède aussi une espérance, et on a :

$$\boxed{E(X_1 \cdots X_n) = E(X_1) \cdots E(X_n)}$$

Càd $$\boxed{E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)}$$

4) Formule de transfert

Prop (Formule de transfert) (Si $X(\Omega)$ est fini)

Soit X une var discrète, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ou monotone.

Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

Alors $$\boxed{E(f(X)) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, P(X = x_k)}$$

Prop (Formule de transfert) (Si $X(\Omega)$ est dénombrable)

Soit X une var discrète, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue ou monotone.

Si $X(\Omega) = \{x_k \,/\, k \in \mathbb{N}^*\}$, où les x_k sont distincts deux à deux,

Alors :

1) $f(X)$ possède une éspérance $\boxed{\text{si et ssi}}$ la série $\sum_{k \geq 1} f(x_k) P(X = x_k)$ est absolument convergente.

2) Dans ce cas, on a :
$$\boxed{E(f(X)) = \sum_{k=1}^{+\infty} f(x_k) P(X = x_k)}$$

Prop

Soit X une var discrète.

1) On a :
$$\boxed{X \text{ possède une éspérance} \iff |X| \text{ possède une éspérance}}$$

2) Le cas échéant, on a :
$$\boxed{|E(X)| \leq E(|X|)}$$ (Inégalité triangulaire)

III) Variance d'une var

1) Moment d'une var

Déf

Soient $k \in \mathbb{N}$ et X une var sur (Ω, T, P).

1) Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$, sous réserve d'existence.

2) On le note m_k.

2) Variance d'une var

Déf (variance)

La variance de X est :

$$\boxed{V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)}$$

<< sous réserve d'existence. >>

Prop

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2}$$

Prop

1) $V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$, où $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$

⚠ 2) $V(X) = \sum_{x \in D} (x - E(X))^2 P(X = x)$, où $D = X(\Omega)$ fini.

3) $V(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k)$, où $X(\Omega) = \{x_k / k \in \mathbb{N}^*\}$

Prop

1) $V(aX + b) = a^2 V(X)$

2) $V(X + b) = V(X)$

Vocabulaire

1) Si $E(X) = 0$, on dit que X est une var centrée.

2) Si $V(X) = 1$, on dit que X est une var réduite

3) Si $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$, X est centrée réduite.

Déf

L'écart-type de X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Prop

Si $V(X) \neq 0$, alors la var $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

3) Covariance d'une var

Déf

Soient X et Y deux var.

La covariance de X et Y est :

$$\boxed{Cov(X,Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big)}$$

Prop

1) $Cov(X,X) = V(X)$

2) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

3) $V(X+Y) = V(X) + 2\,Cov(X,Y) + V(Y)$

Prop

Si X et Y sont indépendants alors :

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

Corollaire

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des var indépendantes, alors :

$$\boxed{V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)}$$

Càd : $$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)}$$

4) Variances des var discrètes usuelles

Prop

X	$X = C$ Constante	$X \sim \mathcal{U}(n)$	$X \sim \mathcal{B}(p)$	$X \sim \mathcal{B}(n,p)$
$E(X)$	C	$\frac{n+1}{2}$	p	np
$V(X)$	0	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$

5) Inégalité de Markov – Inégalité de Bienaymé–Tchebychev

Prop (Inégalité de Markov)

Soit X une var positive. Soit $a \geq 0$. On a :

$$\boxed{E(X) \geq a\,P(X \geq a)}$$

Corollaire (Inégalité de Bienaymé–Tchebychev)

Soit X une var d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$. On a :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$$

Partie 2
Fin Résumé