CCP Maths 1

Calcul d'une intégrale double, Équation différentielle et Transformation d'Abel

Corrigé

Exercice 1.

En effectuant le changement de variable $(x,y)=\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$, on obtient

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dxdy = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{r}{1+r^2}drd\theta \underbrace{=}_{Fubini} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}dr\right)d\theta = \pi\ln 2$$

Exercice 2.

1. La fonction $x\mapsto x^2$ est continue ne s'annule pas sur l'intervalle I, donc l'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle $y''+\frac{a(x)}{x^2}y'+\frac{b(x)}{x^2}y=0$ sur I qui est bien une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients continues, il vient que $\dim S^+=2$.
Avec un même raisonnement on a ; $\dim S^-=2$.

2. Soit $f\in\ker\varphi$; nous avons $f_I=0$ et $f_J=0$, et par continuité de f en 0, on a aussi $f(0)=0$, ceci montrer que $f=0$ sur $\mathbb{R}$; d'où $\ker\varphi=\{0\}$, et par le théorème du rang appliqué à φ, on a $\dim S=\dim\ker\varphi+\operatorname{rg}\varphi=\operatorname{rg}\varphi\le\dim(S^+\times S^-)=4$.

3. Sur I : soit g une solution de (E) sur I, nous avons $(g')'+\frac{1}{x}(g')=0$, ainsi g' est solution de l'équation différentielle $y'+\frac{1}{x}y=0$ sur I, dont les solutions sur l'intervalle I sont de la forme $x\mapsto\frac{\lambda}{x}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$, il existe alors $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in I$ $g'(x)=\frac{\lambda}{x}$, donc g est de la forme $x\mapsto\lambda\ln x+\beta$ où $\lambda,\beta\in\mathbb{R}$. on en déduit que $S^+=\operatorname{Vect}\{x\mapsto 1, x\mapsto\ln x\}$ et $\dim S^+=2$.
Sur J : avec un même raisonnement on obtient $S^-=\operatorname{Vect}\{x\mapsto 1, x\mapsto\ln(-x)\}$.
Détermination de S : Soit $f\in S$, notons f_I (resp. f_J) la restriction de f à I (resp. à J), on a $f_I\in S^+$ et $f_J\in S^-$, ils existent $\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $x\in I$ $f(x)=f_I(x)=\alpha+\beta\ln x$ et pour tout $x\in J$ $f_J(x)=f(x)=\alpha'+\beta'\ln(-x)$, comme la fonction f est continue en 0, alors les deux fonctions f_I et f_J admettent des limites finies respectivement à droite et à gauche en 0, ce qui montre que $\beta=\beta'=0$, il vient alors que la fonction f est constante sur chacun des intervalle I et J et puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$ a savoir $\alpha=\alpha'$.
Conclusion $S=\operatorname{Vect}\{x\mapsto 1\}$, et $\dim S=1$.

4. Si $x\mapsto x^\alpha$ est solution de (E) sur I, on remplace dans (E) on obtient $\alpha^2-7\alpha+12=0$, on a alors deux valeurs possibles pour α ; $\alpha=3$ ou $\alpha=4$, et les deux applications $x\mapsto x^4$ et $x\mapsto x^3$ sont bien des solutions de (E) sur I, comme ces deux fonctions sont linéairement indépendantes, donc ils forment une base de S^+ et on a $S^+=\operatorname{Vect}\{x\mapsto x^3, x\mapsto x^4\}$.
On vérifie aussi que les deux fonctions définies sur J par $x\mapsto x^4$ et $x\mapsto x^3$ sont des solutions de (E) sur J, ces deux fonctions forme un système libre donc une base de S^- ; d'où $S^-=\operatorname{Vect}\{x\mapsto x^3, x\mapsto x^4\}$.

Exercice 2. suite

test

5. On peut démontrer que dans cet exemple, l'application φ définie à la question 2. est un isomorphisme ; en effet si $(f_1, f_2) \in S^+ \times S^-$, notons f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f/I = f_1$ et $f/J = f_2$ et $f(0) = 0$, par définition de f ils existent $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^4$ et pour tout $x \leq 0$ $f(x) = \alpha' x^3 + \beta' x^4$, f est deux fois dérivable et vérifie l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que φ est surjective.

On en déduit que $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} \alpha x^3 + \beta x^4 & si \quad x \geq 0 \\ \alpha' x^3 + \beta' x^4 & si \quad x \leq 0 \end{cases} / \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim S^+ = \dim S^- = 2$ et $\dim S = 4$.

6. On considère l'équation différentielle $x^2 y'' + 8xy' + 12y = 0$.
Sur I les solutions sont de la forme $x \mapsto \frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^4}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et
sur J les solutions sont de la forme $x \mapsto \frac{\alpha'}{x^3} + \frac{\beta'}{x^4}$, si f est solution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$, alors ils existent $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^4}$ et pour tout $x < 0$, $f(x) = \frac{\alpha'}{x^3} + \frac{\beta'}{x^4}$, puisque f continue en 0 donc , admet une limite finie en 0^+ et en 0^- , ce qui montre que $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, ainsi f est la fonction nulle.
Conclusion : $S = \{0\}$.

PROBLÈME

Première partie : Convergence de séries par transformations d'Abel

1.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k + a_n B_n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \end{aligned}$$

Au passage on a utilisé l'égalité $B_0 = b_0$

2. 2.1 $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a_0$, donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$ converge.

2.2 La suite $(a_n)_n$ étant décroissante, donc pour tout $k \geq 0$; $a_k - a_{k+1} \geq 0$, puisque $(B_n)_n$ est bornée alors $(a_n - a_{n+1}) B_n = O(a_n - a_{n+1})$, maintenant la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} (a_n - a_{n+1})$ permet de conclure que la série $\sum_{n\geq 0}(a_n - a_{n+1})B_n$ converge absolument, et en particulier elle est convergente, d'autre part la suite $(a_nB_n)_n$ converge de limite nulle ($(B_n)_n$ bornée et $(a_n)_n$ tend vers 0), en déduit alors que la série $\sum_{n\geq 0} a_nb_n$ converge.

Remarque : on a aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nb_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})B_n$

2.3 Énoncé : Si $(a_n)_n$ est une suite décroissante de limite nulle, alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \pm 1| \leq 1$, et $(a_n)_n$ décroissante de limite nulle ; d'après le résultat de la question précédente ; la série en question converge.

3. 3.1 $e^{i\theta} \neq 1$ puisque $\theta \neq 0[2\pi]$.

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\theta}\frac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = e^{i\theta}\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}}(e^{i\frac{n\theta}{2}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})} = e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.$$

3.2

Cas $\alpha > 0$: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}$ et d'autre part la suite de terme générale $\frac{1}{n}$ ($n > 0$) décroit vers 0, d'après le résultat de la question 2.2 la série en question converge.

Cas $\alpha \leq 0$: on a $|\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}| = \frac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite de terme générale $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, dans ce cas il y a divergence grossière ; on en déduit que la série diverge dans ce cas.

3.3 Si $x \neq 2k\pi$: Par application du résultat de la question précédente (avec $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\theta = x$) la série $\sum_{n\geq 1}\frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ converge, en passant à la partie imaginaire de la série, il vient que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge.

Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors pour tout $n \geq 1$; $u_n(x) = 0$ et donc la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ converge.

Deuxième partie :
Convergence uniforme de séries

4. 4.1 Pour tout $z \in A$; $|a_nF_n(z)| \leq a_nM$, donc $\sup_{z\in A}|a_nF_n(z)| \leq a_nM \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre la convergence uniforme sur A.
pour tout $n \in A$; $(a_n - a_{n+1})F_n(z) \leq (a_n - a_{n+1})M$, et la convergence de la série $\sum_{(a_n-a_{n+1})}$ permet de conclure.

4.2 On a $\sum_{k=0}^{n} a_nf_n = \sum_{k=0}^{n-1}(a_n - a_{n+1})F_n + a_nF_n$ "Transformation d'Abel", puisque les deux suites de fonctions $(a_nF_n)_n$ et $((a_n - a_{n+1})F_n)_n$ convergent uniformément sur A alors leurs somme est une suite uniformément convergente sur A.

5. 5.1 Pour $x \in \mathbb{R}$; $1 - e^{ix} = (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})e^{i\frac{x}{2}} = -2i\sin(\frac{x}{2})e^{e^{i\frac{x}{2}}}$.

Soit $a \in]0,\pi[$, on va appliquer le résultat de la question précédente avec $a = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et f_n la suite de fonction définie sur $[a, 2\pi - a]$ par $f_n(x) = \sin(xn)$, pour cela il suffit de démontrer que que la suite de fonctions de terme générale $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ est uniformément bornée sur $[a, 2\pi - a]$: pour tout $x \in [a, 2\pi - a]$, on a

$|F_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$, *mains pour* $x \in [a, 2\pi - a]$, *on a* $x \in [\frac{a}{2}, \pi - \frac{a}{2}]$, *et donc* $0 < \sin\frac{a}{2} \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1$, *ce qui montre que* $|F_n(x)| \leq \dfrac{1}{\sin\frac{a}{2}}$. *D'où le résultat.*

La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *est uniformément convergente sur tout intervalle de la forme* $[a, 2\pi - a]$ *(*$a \in]0, \pi[$ *), donc sa somme* U *est continue sur tout intervalle de la forme* $[a, 2\pi - a]$ *(*$a \in]0, \pi[$*), c'est bien que la fonction* U *est continue sur* $\cup_{a\in]0,\pi[}[a, 2\pi - a] =]0, \pi[$.

$\boxed{5.2}$ *Pour* $x \in]0, \pi]$ *, on a* $|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)| \leq \dfrac{|\sin(px)|}{\sin(\frac{x}{2})} \leq \dfrac{\sin(px)\pi}{x} \leq \dfrac{px\pi}{x} = p\pi$.

Si $x = 0$, *on a aussi* $|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin(kx)\sin(px)| = 0 \leq p\pi$.

En appliquant ce qui précède la série converge uniformément sur l'intervalle $[0, \pi]$.

$\boxed{6.}$ $\boxed{6.1}$ *La fonction* U *étant impaire, donc pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *,* $a_p(U) = 0$.

Toujours avec raison de parité de U*, pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *;* $b_p(U) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(px)U(x)dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)dx$, *la série* $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ *converge uniformément sur le compact* $[0, \pi]$, *ce qui permet d'intervertir la somme et l'intégrale, il vient que* $b_p(U) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\pi} \sin(px)\sin(nx)dx = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

$\boxed{6.2}$ *Sous l'hypothèse que* U *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$ *donc aussi sur le segment* $[0, 2\pi]$, *la formule de Parseval, s'écrit*

$$\frac{a_0(U)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(U)^2 + b_n(U)^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x)^2 dx$$

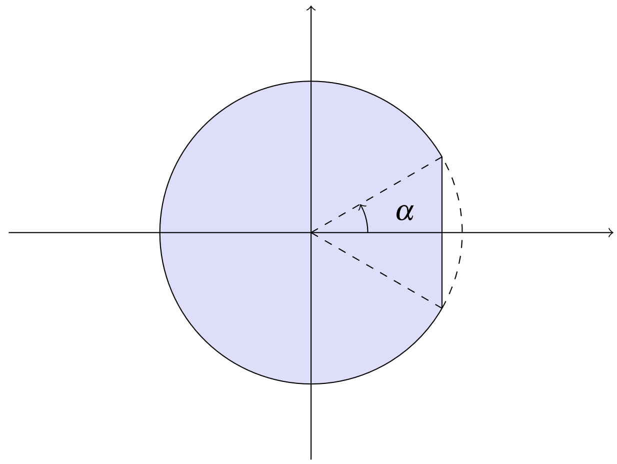
Ce qui implique que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}})^2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *converge, qui est une contradiction. D'où le résultat.*

Troisième partie :
Convergence uniforme d'une série entière

$\boxed{7.}$ *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$ *converge uniformément sur tout disque fermé de centre* 0 *et de rayon* $r < R$.

$\boxed{8.}$ $\boxed{8.1}$ *Supposons que la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ *converge uniformément sur* $]-1, 1[$, *donc la suite des sommes partielles associées est uniformément bornée sur* $]-1, 1[$, *c'est-à-dire il existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tel que pour tout* $n \in N^*$ *et tout* $x \in]-1, 1[$ *;* $|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{\sqrt{k}}| \leq M$, *en passant à la limite lorsque* x *tend vers* 1, *on obtient, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *;* $|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}| \leq M$ *, ce qui n'est pas le cas, car la série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge.*

$\boxed{8.2}$



8.3 On muni $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_2$ (en dimension finie toute les normes sont équivalentes), l'ensemble D_α est l'intersection des deux fermés suivants : Le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 "pour la norme $\|.\|_2$" et $p_1^{-1}(]-\infty,\cos\alpha])$ où p_1 est la première projection qui est une application continue ($p_1(x,y)=x$).
Remarque : l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
Pour tout $(x,y)\in D_\alpha$; $\|(x,y)\|_2\leq 1$, donc D_α est borné.
D_α fermé bornée, donc compact (dimension finie).

8.4 Pour $z\in D_\alpha$, on a $z\neq 1\notin D_\alpha$, donc $|F_n(z)|=|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}|\leq\dfrac{1+|z^{n+1}|}{|1-z|}\leq\dfrac{2}{|1-z|}$, d'autre part $0<1-\cos\alpha\leq 1-x=\mathrm{Re}(1-z)\leq|1-z|$, donc $F_n(z)\leq\dfrac{2}{|1-z|}\leq\dfrac{2}{1-x}\leq\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$.

8.5 D'après le résultat de la question précédente, pour tout $z\in D_\alpha$, $|F_n(z)|\leq\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$, c'est-à-dire la suite des somme partielles $(\sum_{k=1}^{n} z^k)_n$ est uniformément bornée sur D_α, et comme la suite $(\dfrac{1}{\sqrt{n}})_n$ est décroissante vers 0, d'après le résultat de la question 5.1 la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge uniformément sur D_α.

FIN