$k=0$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\varphi(P_2,Q)$

$\Rightarrow$ Supp. que $\varphi(P,P)=0$ et M.q. $P=0$:

$\varphi(P,P)=0 \Rightarrow (\forall\, 0\leq k\leq n,\ P(k)=0)$ (car $\forall k,\ P(k)^2\geq 0$ et leur somme est nulle)

Or $d^\circ(P)\leq n$ et possède $(n+1)$ racines distinctes

alors $\boxed{P=0}$

Projecteur

F et G sev de E ;

$E = F \oplus G$

P_F : le projecteur sur F $/\!/^{\text{t}}_{=}$ à G :

$$P_F : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x = \underset{\in F}{x_1} + \underset{\in G}{x_2} & \longmapsto & x_1 \end{array}$$

$E = F \oplus F^{\perp}$

P_F le projecteur sur F $/\!/^{\text{t}}_{=}$ à $F^{\perp}$ s'appelle le projecteur orthogonal sur F.

5) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

$(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est encore un esp préhilbertien réel.

Déf

Soit F un sev de dim finie de E.
On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Pro

$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
Notons $e_1 = (1, 0, 1, 0), e_2 = (1, -1, 1, -1)$ et $F = vect(e_1, e_2)$

1) Déterminer une base orthonormale de F.
2) Déterminer $d(x, F)$, où $x = (1, 1, 1, 1)$

$d(x,F) = ?$

$d(x,F) = d(x, P_F(x))$

$d(x,F) = \|x - P_F(x)\|$

$P_F(x) = ?$

Déf

Soit F un sev de dim finie de E.
On sait que $E = F \oplus F^{\perp}$.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ s'appelle la projection orthogonale sur F.

Prop

Soient F un sev de dim finie de E, et $(e_1, \dots, e_p)$ une bon de F.
On a :

$$\forall x \in E, \quad P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$$

où $P_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F.