

Épreuve spécifique de Mathématiques

(filière MPSI)

Mercredi 22 mai 2002 de 08h00 à 12h00

Extrait

PROBLEME II : Calcul et irrationalité de $\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k , $f^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème de la fonction f avec : $f^{(0)} = f$.

Remarque : sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.

Partie A : Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p} \right)_{n \geq 1}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls et on pose $S_n(p) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$.

1. Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^p} dx \leq \frac{1}{k^p}$.

2. Montrer que pour $n \geq 2$, $S_n(p) - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \leq S_{n-1}(p)$.

3. Démontrer, par un calcul d'intégrales, que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $p \geq 2$.

4. Montrer que la suite $(S_n(p))_{n \geq 1}$ converge si et seulement si $p \geq 2$.
On note alors $\zeta(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(p)$.

Partie B : Calcul de $\zeta(2)$

Dans cette partie on pose, pour t réel : $h(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$, et on définit la fonction φ sur $[0, \pi]$ par :

$$\varphi(0) = -1 \text{ et } \varphi(t) = \frac{h(t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \text{ pour } t \in]0, \pi].$$

5. Montrer que la fonction φ est de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$.

6. Calculer, pour tout k entier naturel non nul, $\int_0^\pi h(t) \cos(kt) dt$.

7. Calculer, pour $t \in]0, \pi]$, $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$, puis déterminer une constante λ telle que,

$$\forall t \in]0, \pi], \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} - \lambda.$$

8. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction ψ de classe C^1 sur l'intervalle

$$[0, \pi], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \psi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0.$$

9. Montrer que $\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$.

Partie C : $\zeta(2)$ est irrationnel

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}$.

10. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

- Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n}$ tels que $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$.
- Montrer que pour tout entier naturel k , $f_n^{(k)}(0)$ et $f_n^{(k)}(1)$ sont des entiers.
(On pourra remarquer que $f_n(x) = f_n(1-x)$).

On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va **raisonner par l'absurde** : on suppose que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

11. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$F_n(x) = b^n (\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \dots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)).$$

- Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.
- On pose, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n(x) = F_n'(x) \sin(\pi x) - \pi F_n(x) \cos(\pi x)$,

$$\text{et } A_n = \pi \int_0^1 a^n f_n(x) \sin(\pi x) dx.$$

Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel : $g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x) \sin(\pi x)$, et montrer que A_n est un entier.

12. On pose, toujours pour le même entier a , $u_n = \frac{a^n}{n!}$.

- En considérant le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2}$.
- Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!}$.
- Montrer alors que, pour tout entier $n \geq n_0$, $A_n \in]0, 1[$, et conclure que π^2 est irrationnel.
- Comment peut-on déduire de ce qui vient d'être fait que π est irrationnel ?

Pour information

Il a été prouvé depuis le 18^{ème} siècle, que $\zeta(p)$ est irrationnel pour tout entier pair $p \geq 2$, récemment (1979) il vient d'être découvert que $\zeta(3)$ est irrationnel et le mystère demeure encore quant à l'irrationalité des $\zeta(p)$ pour les entiers impairs $p \geq 3$...

FIN